
SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
ET
VE
RI
TAS
CHRISTO ECCLESIAE



BEITRÄGE

ZUR

THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN MIT COEFFICIENTEN, DIE VON EINEM PARAMETER ABHÄNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT

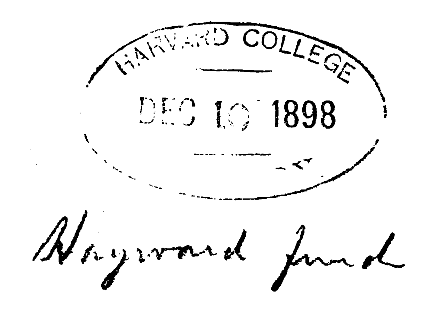
VON

JULIUS LEVY

AUS MOSKAU.

HALLE A. S.

1898.

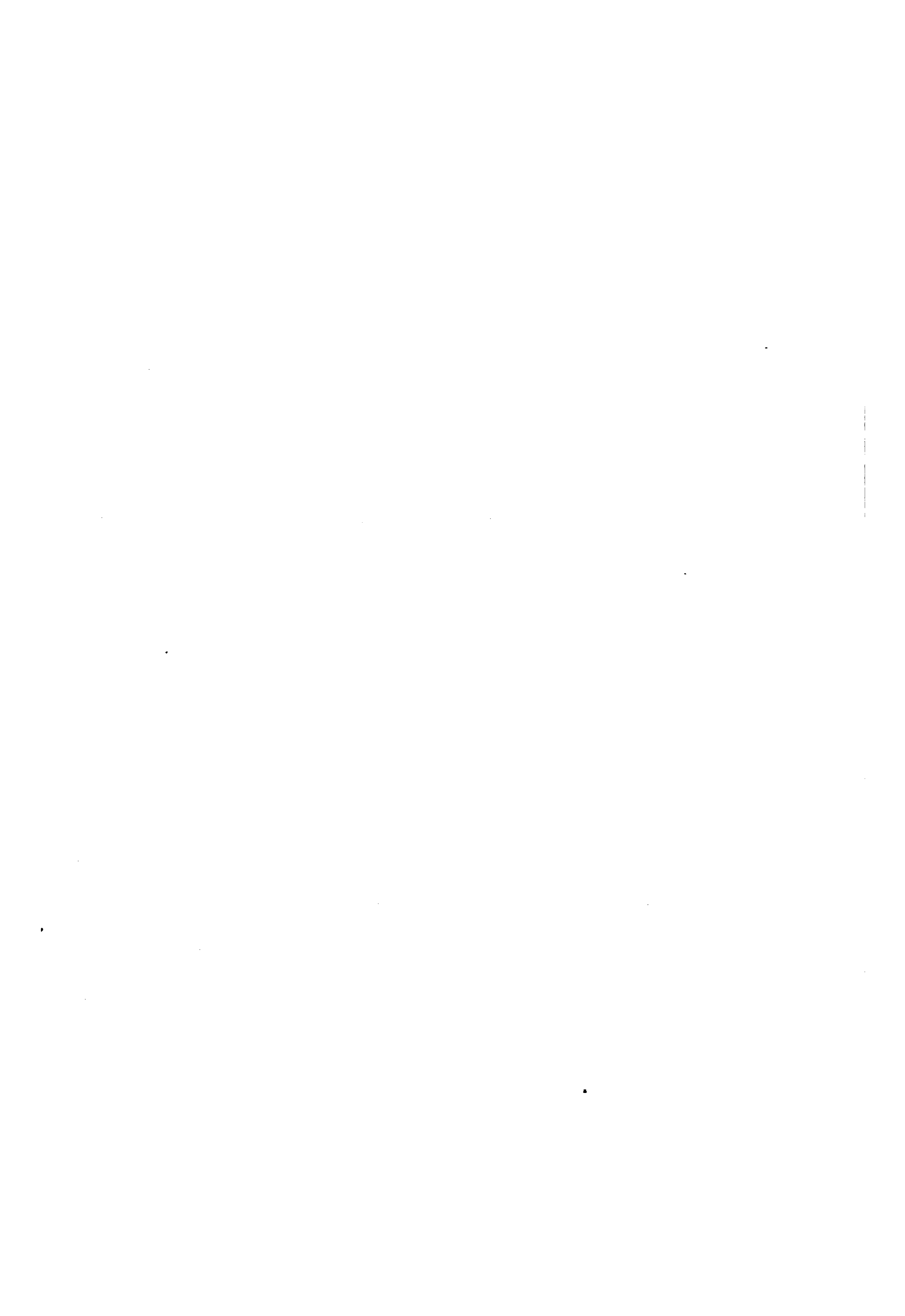

HARVARD COLLEGE
DEC 10 1898

Meiner lieben Mutter

und dem

Andenken meines Vaters

gewidmet.



Herr Prof. Fuchs behandelt in seiner Arbeit (Berichte der Berliner Akademie 1895, S. 901 ff.) folgende Aufgabe: Man gehe von einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung (A) mit Coefficienten, die rationale Functionen der Unabhängigen (x) und eines Parameters (t) sind, aus und nehme an, dass das Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung, aufgefasst als Function des Parameters, einer Differentialgleichung 3. Ordnung (B) mit ebenso beschaffenen Coefficienten wie in (A) genügt, es soll untersucht werden, wann dieses stattfinden kann. Das Ergebnis, zu welchem Herr Prof. Fuchs gelangt, ist das folgende: Die beiden Differentialgleichungen (A) und (B) können nur dann bestehen, wenn entweder die Monodromiegruppe der Differentialgleichung vom Parameter unabhängig ist, oder wenn (A) reductibel ist und zwar so, dass ihr ein Integral von der Form

$$e^{-\int R(x,t)\,\partial x}$$

genügt.

Diese Function $R(x, t)$ ist aus den Coefficienten der beiden Differentialgleichungen (A) und (B) und Ableitungen dieser Coefficienten nach x und t gebildet, man kann daher diesen 2. Fall auch so aussprechen: es sind die Coefficienten von (A) und (B) und ihre Ableitungen durch eine Gleichung von der Form $B_2 = 0$ [in der dortigen Bezeichnung] verbunden. Unsere Arbeit soll nun den Versuch machen, das Resultat, welches Herr Prof. Fuchs erzielt hat, mit Hülfe eines analogen Verfahrens auf Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung auszudehnen und

insbesondere Kriterien für etwaige Reductibilität von (A), bzw. (B) aufzustellen. Wir sind dabei zu folgendem Ergebnis gekommen: die beiden Differentialgleichungen von obenerwähnter Beschaffenheit können nur dann bestehen, wenn entweder die Monodromiegruppe vom Parameter unabhängig ist, oder wenn die Coefficienten der beiden Differentialgleichungen und die Ableitungen dieser Coefficienten nach x und t durch Gleichungen miteinander verbunden sind. Solche Gleichungen können unter Umständen die Reductibilität von (A) bekunden; diese Reductibilität ist mithin als Specialfall zu betrachten, und wird durch das Verschwinden gewisser Determinanten, bzw. das Bestehen von gewissen Gleichungen gegeben. Diese Reductibilität äusfert sich, von einigen Ausnahmefällen abgesehen, darin, dass der zu (A) Adjungierten (bzw. 1. Associierten) ein Integral von der Form

$$e^{-\int R(x,t)\,\partial x}$$

genügt. Die Ausnahmefälle, welche durch das Verschwinden gewisser Gröfsen $\overset{\lambda}{e}_{\lambda\mu}$ gegeben werden, ergeben das Resultat, dass die zu (A) Adjungierte [nicht aber die 1. Associierte, auch wenn der Coefficient der zweithöchsten Ableitung nicht null ist] ein rationales Integral besitzt.

I.

§ 1.

Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung gegeben, die Coefficienten sollen rationale Functionen der Unabhängigen (x) und eines Parameters (t) sein; es möge vorausgesetzt werden, dass das Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung, aufgefasst als Function des Parameters, einer homogenen linearen Differentialgleichung genügt, deren Ordnung ebenfalls die 3. ist und deren Coefficienten wiederum rationale Functionen von x und t sind; es soll untersucht werden, wann dieses eintreten kann.

Da man es stets in der Macht hat, den Coefficienten der zweithöchsten Ableitung in einer Differentialgleichung beliebiger Ordnung durch eine geeignete Substitution zum Verschwinden zu bringen, gehen wir von der folgenden Differentialgleichung aus:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + p_2 \frac{\partial z}{\partial x} + p_3 z = 0 \tag{A}$$

und nehmen an, dass das Fundamentalsystem ihrer Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial t^3} + q_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + q_2 \frac{\partial z}{\partial t} + q_3 z = 0 \tag{B}$$

genügt.

Zur Vereinfachung mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu} z}{\partial x^\lambda \, \partial t^\mu} = (\lambda, \mu);$$

die n-malige Differentiation der Gleichung (A), bzw. (B) nach (t), bzw. (x) möge symbolisch auf folgende Weise angedeutet werden:

$$\frac{\partial^n A}{\partial t^n}\ldots\qquad \frac{\partial^n B}{\partial x^n}\ldots;$$

mithin haben wir folgendes System von Gleichungen (das wir der Kürze halber mit (S) bezeichnen)

$$\begin{aligned}&(3,1)+p_2(1,1)+p_3(0,1)+\\&\quad+\frac{\partial p_2}{\partial t}(1,0)+\frac{\partial p_3}{\partial t}(0,0)=0\end{aligned}\qquad\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

$$\begin{aligned}&(3,2)+p_2(1,2)+p_3(0,2)+\\&\quad+2\frac{\partial p_2}{\partial t}(1,1)+2\frac{\partial p_3}{\partial t}(0,1)+\\&\quad+\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2}(1,0)+\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}(0,0)=0\end{aligned}\qquad\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)$$

$$\begin{aligned}&(3,3)+p_2(1,3)+p_3(0,3)+\\&\quad+3\frac{\partial p_2}{\partial t}(1,2)+3\frac{\partial p_3}{\partial t}(0,2)+\\&\quad+3\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}(1,1)+3\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}(0,1)+\\&\quad+\frac{\partial^3 p_2}{\partial t^3}(1,0)+\frac{\partial^3 p_3}{\partial t^3}(0,0)=0\end{aligned}\qquad\left(\frac{\partial^3 A}{\partial t^3}\right)$$

$$\begin{aligned}&(1,3)+q_1(1,2)+q_2(1,1)+q_3(1,0)+\\&\quad+q_1'(0,2)+q_2'(0,1)+q_3'(0,0)=0\end{aligned}\qquad\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)$$

$$\begin{aligned}&(3,3)+\ q_1\ (3,2)+\ q_2\ (3,1)+\ q_3\ (3,0)+\\&\quad+3q_1'\ (2,2)+3q_2'\ (2,1)+3q_3'\ (2,0)+\\&\quad+3q_1''\ (1,2)+3q_2''\ (1,1)+3q_3''\ (1,0)+\\&\quad+\ q_1'''(0,2)+\ q_2'''(0,1)+\ q_3'''(0,0)=0\end{aligned}\qquad\left(\frac{\partial^3 B}{\partial x^3}\right)$$

$$q_\lambda^{(\mu)}=\frac{\partial^\mu q_\lambda}{\partial x^\mu}.$$

Wir bilden nunmehr folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial^3 B}{\partial x^3} + p_2 \frac{\partial B}{\partial x} + p_3 B - \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - q_1 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - q_2 \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$- q_3 A = \sum_{\lambda=0}^{2} \sum_{\mu=0}^{2} c_{\lambda\mu} (\lambda, \mu) = 0, \tag{1}$$

wo die Coefficienten $c_{\lambda\mu}$ so aussehen:

$$c_{2\rho} = 3 q'_{3-\rho} \qquad \varrho = 0, 1, 2$$

$$c_{12} = 3\left(q''_1 - \frac{\partial p_2}{\partial t}\right); \; c_{11} = 3 q''_2 - 3 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - 2 q_1 \frac{\partial p_2}{\partial t}$$

$$c_{10} = 3 q''_3 - \frac{\partial^3 p_2}{\partial t^3} - q_1 \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - q_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}$$

$$c_{02} = q'''_1 - 3 \frac{\partial p_3}{\partial t} + p_2 q'_1$$

$$c_{01} = q'''_2 - 3 \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} - 2 q_1 \frac{\partial p_3}{\partial t} + p_2 q'_2$$

$$c_{00} = q'''_3 - \frac{\partial^3 p_3}{\partial t^3} - q_1 \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} - q_2 \frac{\partial p_3}{\partial t} + p_2 q'_3.$$

Die Gleichung (1) differentiieren wir zweimal der Reihe nach nach x unter Benutzung der Gleichung (S), alsdann haben wir:

$$\sum_{\lambda=0}^{2} \sum_{\mu=0}^{2} \overset{2}{c}_{\lambda\mu} (\lambda, \mu) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{2} \sum_{\mu=0}^{2} \overset{3}{c}_{\lambda\mu} (\lambda, \mu) = 0. \tag{3}$$

Die Coefficienten der Gleichung (2) sind:

$$\overset{2}{c}_{2\rho} = c'_{2\rho} + c_{1\rho} \qquad \varrho = 0, 1, 2$$

$$\overset{2}{c}_{12} = c'_{12} + c_{02} - p_2 c_{22}; \; \overset{2}{c}_{02} = c'_{02} - p_3 c_{22}$$

$$\overset{2}{c}_{11} = c_{11} + c_{02} - 2\frac{\partial p_2}{\partial t} c_{22} - p_2 c_{21}$$

$$\overset{2}{c}_{01} = c'_{01} - 2 c_{22} \frac{\partial p_3}{\partial t} - p_3 c_{21}$$

$$\overset{2}{c}_{10} = c'_{10} + c_{00} - \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} c_{22} - \frac{\partial p_2}{\partial t} c_{21} - p_2 c_{20}$$

$$\overset{2}{c}_{00} = c'_{00} - \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} c_{22} - \frac{\partial p_3}{\partial t} c_{21} - p_3 c_{20}.$$

Die Coefficienten der Gleichung (3) sind genau ebenso aus denen der Gleichung (2) gebildet, wie diese letzten aus den Coefficienten der Gleichung (1).

Eliminieren wir aus den 3 Gleichungen (2, 2) und (1, 2), so erhalten wir:

$$e_{02}(0, 2) + e_{21}(2, 1) + e_{11}(1, 1) + e_{01}(0, 1) + \\ + e_{20}(2, 0) + e_{10}(1, 0) + e_{00}(0, 0) = 0 \qquad (I)$$

wo:

$$e_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} c_{\lambda\mu} & \overset{2}{c}_{\lambda\mu} & \overset{3}{c}_{\lambda\mu} \\ c_{12} & \overset{2}{c}_{12} & \overset{3}{c}_{12} \\ c_{22} & \overset{2}{c}_{22} & \overset{3}{c}_{22} \end{vmatrix}.$$

Warum wir gerade (2, 2) und (1, 2) eliminiert haben, wird aus den weiter folgenden Entwickelungen ersichtlich.

Wir nehmen an, dass

$$e_{02} \gtrless 0$$

ist, die Annahme $e_{02} = 0$, führt, wie wir später sehen werden, zu dem Verschwinden sämtlicher $e_{\lambda\mu}$ (wo $\mu > 0$).

Es seien z_1, z_2, z_3 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A), die auch der (B) Genüge leisten. Bezeichnen wir das, was aus einer Function nach einem Umlauf um einen sin-

gulären Punkt wird, durch dasselbe Functionszeichen mit einem darüber gesetzten Strich, so haben wir:

$$\bar{z}_\lambda = \alpha_{\lambda 1} z_1 + \alpha_{\lambda 2} z_2 + \alpha_{\lambda 3} z_3$$
$$\lambda = 1, 2, 3;$$

die $\alpha_{\lambda\mu}$ sind im allgemeinen Functionen von t; setzen wir

$$\frac{d^k \alpha_{\lambda\mu}}{dt^k} = \alpha_{\lambda\mu}^{(k)}$$
$$\frac{\partial^{\lambda+\mu} \bar{z}_k}{\partial x^\lambda \partial t^\mu} = \overline{(\lambda, \mu)_k}$$

so wird:

$$\overline{(2, 1)_k} = \sum_{\iota=1}^{3} \left\{ \alpha_{k\iota} (2, 1)_\iota + \alpha'_{k\iota} (2, 0)_\iota \right\}$$
$$\overline{(0, 2)_k} = \sum_{\iota=1}^{3} \left\{ \alpha_{k\iota} (0, 2)_\iota + 2\, \alpha'_{k\iota} (0, 1)_\iota + \alpha''_{k\iota} (0, 0)_\iota \right\}$$
$$k = 1, 2, 3.$$

Es verwandelt sich also die Gleichung (I) nach einem Umlauf in:

$$\sum_{\iota=1}^{3} \left\{ \alpha'_{k\iota} F_\iota + \alpha''_{k\iota} G_\lambda \right\} = 0. \qquad (\bar{I})$$

Von solchen Gleichungen wie ($\bar{I}$) existieren für jeden singulären Punkt 3, nämlich für $k = 1, 2, 3$; dabei ist

$$F_\iota = 2\, e_{02} (0, 1)_\iota + e_{21} (2, 0)_\iota + e_{11} (1, 0)_\iota + e_{01} (0, 0)$$
$$G_\iota = e_{02} z_\iota.$$

Es sei die Determinante

$$\Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha'_{22} \alpha'_{33} = \delta.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1) $\delta \gtrless 0$;

dann ist

$$(-1)^\lambda \delta \cdot F_\lambda = \delta_{\lambda 1} G_1 + \delta_{\lambda 2} G_2 + \delta_{\lambda 3} G_3 \qquad (II)$$
$$\lambda = 1, 2, 3,$$

wo

$$\delta_{11} = \Sigma \pm \alpha''_{11} \alpha'_{22} \alpha'_{33} \qquad \delta_{21} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha''_{21} \alpha'_{33}$$
$$\delta_{12} = \Sigma \pm \alpha''_{12} \alpha'_{22} \alpha'_{33} \qquad \delta_{22} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha''_{22} \alpha'_{33}$$
$$\delta_{13} = \Sigma \pm \alpha''_{13} \alpha'_{22} \alpha'_{33} \qquad \delta_{23} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha''_{23} \alpha'_{33}$$
$$\delta_{31} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha'_{22} \alpha''_{31}$$
$$\delta_{32} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha'_{22} \alpha''_{32}$$
$$\delta_{33} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha'_{22} \alpha''_{33}.$$

Zunächt sieht man aus der Gleichung (II), dass δF_λ ein Integral der Gleichung (A) ist; da $e_{02} \neq 0$, so ist auch ein jedes

$$\frac{F_\lambda}{2\, e_{02}} = (0, 1)_\lambda + \frac{e_{21}}{2\, e_{02}} (2, 0)_\lambda + \frac{e_{11}}{2\, e_{02}} (1, 0)_\lambda + \frac{e_{01}}{2\, e_{02}} (0, 0)_\lambda$$

ein Integral von (A). Nun behaupten wir folgendes: ist die Gleichung (A) irreductibel, so bilden $\frac{F_\lambda}{2\, e_{02}}$ ($\lambda = 1, 2, 3$), oder, was auf dasselbe hinauskommt, F_1, F_2, F_3 ein Fundamentalsystem von Integralen von (A); denn gesetzt, es wäre nicht der Fall, d. h. es gäbe eine Gleichung von der Form:

$$a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 = 0,$$

wo a_1, a_2, a_3 Constante sind; so erhalten wir, wenn wir für F_λ den Wert aus (II) einsetzen, eine Gleichung:

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0,$$

wo

$$m_\mu = a_1\,\delta_{1\mu} - a_2\,\delta_{2\mu} + a_3\,\delta_{3\mu}$$

$$\mu = 1, 2, 3.$$

Da nun aber z_1, z_2, z_3 ein Fundamentalsystem bilden und (A) als irreductibel vorausgesetzt ist, müssen die sämtlichen

$$m_1,\ m_2,\ m_3$$

verschwinden; nun ist aber $\delta \neq 0$, also auch $-\delta^2 \neq 0$, d. h. es ist

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

mithin die gemachte Annahme absurd. Umgekehrt: bilden die F_1, F_2, F_3 kein Fundamentalsystem, so ist (A) reductibel, und zwar hat sie mit einer Differentialgleichung 1. Ordnung Integrale gemeinsam.

2) $\delta = 0$.

Alsdann folgt aus Gleichung (II), dass alle $\delta_{\lambda\mu}$ verschwinden, weil z_1, z_2, z_3 ein Fundamentalsystem bilden. ($e_{02} \gtrless 0$); daraus kann man leicht die Form der Substitutionscoefficienten ablesen; es sind:

$$\alpha_{\lambda\mu} = C_1 \cdot e^{ct} + C_2,$$

wo C_1, c_2, C_2 Constante sind.

Bei der Behandlung unserer Aufgabe haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass keiner der Coefficienten $c_{\lambda\mu}$ null ist; zunächst ist es unmöglich, dass c_{22}, c_{21}, c_{20} verschwinden, weil das ergeben würde, dass die q_λ constant (in Bezug auf x) sind, was ausgeschlossen ist. $c_{00} = 0$ besagt: genügt q_3 als Integral der Gleichung

(A), so genügt p_3 der (B). $c_{01} = 0$ giebt: ist q_2 ein Integral der (A), so besteht für p_3 die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} + {}^2/_3\, q_1 \frac{\partial p_3}{\partial t} + {}^1/_3\, q_2\, p_3 = 0.$$

$c_{02} = 0$: ist q_1 ein Integral von (A), so ist

$$p_3 = Ce^{-{}^1/_3 \int q_1\, \partial t};$$

$c_{10} = 0$: ist p_2 ein Integral der (B), so besteht für q_3 die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2} + {}^1/_3\, p_2\, q_3 = 0$$

u. s. w.

§ 2.

Es möge angenommen werden, dass e_{02} verschwindet, d. h. dass die Coefficienten der beiden Gleichungen (A) und (B) und die Ableitungen dieser Coefficienten nach x und t durch eine Gleichung von der Form verbunden sind:

$$c_{02}\,[2, 3] + \overset{2}{c}_{02}\,[3, 1] + \overset{3}{c}_{02}\,[1, 2] = 0,$$

wo

$$c_{22}\,\overset{\lambda}{c}_{12}\overset{\mu}{} - \overset{\lambda}{c}_{12}\,\overset{\mu}{c}_{22} = [\lambda, \mu]$$

$$c_{22}\,\overset{2}{c}_{12} - c_{12}\,\overset{2}{c}_{22} = [1, 2].$$

Die Gleichung I, § 1 (Seite 10) sieht also, wie folgt, aus:

$$\sum_{\lambda=0}^{2} \sum_{\mu=0}^{1} e_{\lambda\mu}\,(\lambda, \mu) = 0. \qquad (I')$$

Nach einem Umlauf haben wir:

$$\alpha'_{k1} E_1 + \alpha'_{k2} E_2 + \alpha'_{k3} E_3 = 0$$
$$k = 1, 2, 3.$$

Es ist nun zu unterscheiden, ob δ null oder $\gtrless 0$ ist.

$$E_\mu = e_{21}\,(2, 0)_\mu + e_{11}\,(1, 0)_\mu + e_{01}\,(0, 0)_\mu.$$
$$1)\ \ \delta = 0;$$

alsdann lassen sich die Verhältnisse $E_1 : E_2 : E_3$ auf bekannte Weise bestimmen.

$$2)\ \ \delta \gtrless 0;$$

dann sind alle E_μ null, da aber z_1, z_2, z_3 ein Fundamentalsystem constituieren, müssen notwendigerweise e_{21}, e_{11}, e_{01} auch verschwinden. Also bestehen die Gleichungen:

$$c_{21}\,[2, 3] + \overset{2}{c}_{21}\,[3, 1] + \overset{3}{c}_{21}\,[1, 2] = 0$$
$$c_{11}\,[2, 3] + \overset{2}{c}_{11}\,[3, 1] + \overset{3}{c}_{11}\,[1, 2] = 0$$
$$c_{01}\,[2, 3] + \overset{2}{c}_{01}\,[3, 1] + \overset{3}{c}_{01}\,[1, 2] = 0.$$

Dieses hat zur Folge: entweder $[2, 3] = [3, 1] = [1, 2] = 0$, d. h. die Gleichung (A) ist reductibel (das wird im § 3 behandelt), oder es ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{21} & \overset{2}{c}_{21} & \overset{3}{c}_{21} \\ c_{11} & \overset{2}{c}_{11} & \overset{3}{c}_{11} \\ c_{01} & \overset{2}{c}_{01} & \overset{3}{c}_{01} \end{vmatrix} = 0;$$

dieses kann unter Umständen auch besagen, dass (A) reductibel

ist, was durch gewisse Bedingungsgleichungen ausgedrückt wird (§ 3).

Kehren wir nun zu Gleichungen (1) § 1 zurück und differentiieren dieselbe noch 3 mal nach x auf angegebene Weise, so erhalten wir noch 3 Gleichungen von der Form:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \sum_{\mu=0}^{3} \overset{k}{c}_{\lambda\mu} (\lambda, \mu) = 0;$$
$$k = 4, 5, 6$$

aus allen 6 Gleichungen eliminieren wir:

$$(0, 2) \ (1, 1) \ (2, 1) \ (1, 2) \ (2, 2)$$

und erhalten:

$$\gamma_{01}(0, 1) + \gamma_{20}(2, 0) + \gamma_{10}(1, 0) + \gamma_{00}(0, 0) = 0 \qquad (II)$$

wo

$$\gamma_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \overset{1}{c}_{\lambda\mu} & \cdots & \overset{6}{c}_{\lambda\mu} \\ \overset{1}{c}_{02} & \cdots & \overset{6}{c}_{02} \\ \overset{1}{c}_{11} & \cdots & \overset{6}{c}_{11} \\ \overset{1}{c}_{21} & \cdots & \overset{6}{c}_{21} \\ \overset{1}{c}_{12} & \cdots & \overset{6}{c}_{12} \\ \overset{1}{c}_{22} & \cdots & \overset{6}{c}_{22} \end{vmatrix}.$$

Nach einem Umlauf verwandelt sich (II) in:

$$[\alpha'_{\lambda 1} z_1 + \alpha'_{\lambda 2} z_2 + \alpha'_{\lambda 3} z_3] \gamma_{01} = 0$$
$$\lambda = 1, 2, 3;$$

wenn $\gamma_{01} \gtrless 0$ ist, so kann dieses dann und nur dann stattfinden,

wenn alle $\alpha'_{\lambda\mu}$ null sind, weil z_1, z_2, z_3 ein Fundamentalsystem bilden, d. h. ist $\gamma_{01} \gtrless 0$, so ist die Monodromiegruppe vom Parameter unabhängig. Wenn aber $\gamma_{01} = 0$ ist, so sind auch alle übrigen γ_{20}, γ_{10}, γ_{00} null, man hat alsdann ein System von 4 Gleichungen.

§ 3.

Um zu erkennen, wann und wie die Gleichung (Δ) reductibel ist, haben wir, wie folgt, zu verfahren.

Wir differentiieren die Gleichung (1) § 1 8 mal nach x und studieren die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{00} & \overset{2}{c}_{00} & \cdots & \overset{9}{c}_{00} \\ c_{01} & \overset{2}{c}_{01} & \cdots & \overset{9}{c}_{01} \\ c_{02} & \overset{2}{c}_{02} & \cdots & \overset{9}{c}_{02} \\ c_{10} & \overset{2}{c}_{10} & \cdots & \overset{9}{c}_{10} \\ c_{20} & \overset{2}{c}_{20} & \cdots & \overset{9}{c}_{20} \\ c_{11} & \overset{2}{c}_{11} & \cdots & \overset{9}{c}_{11} \\ c_{21} & \overset{2}{c}_{21} & \cdots & \overset{9}{c}_{21} \\ c_{12} & \overset{2}{c}_{12} & \cdots & \overset{9}{c}_{12} \\ c_{22} & \overset{2}{c}_{22} & \cdots & \overset{9}{c}_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass die Coefficienten $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$, $a = 1 \ldots 9$, nicht verschwinden.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\overset{\lambda}{c}_{22}\overset{\mu}{c}_{12} - \overset{\lambda}{c}_{12}\overset{\mu}{c}_{22} = \mathfrak{A}_{\lambda\mu},$$

$$\overset{\lambda}{c}_{21}\overset{\mu}{c}_{11} - \overset{\lambda}{c}_{11}\overset{\mu}{c}_{21} = \mathfrak{B}_{\lambda\mu},$$

$$\overset{\lambda}{c}_{20}\overset{\mu}{c}_{10}-\overset{\lambda}{c}_{10}\overset{\mu}{c}_{20}=\mathfrak{K}_{\lambda\mu},$$

$$\overset{\lambda}{c}_{22}\overset{\mu}{c}_{02}-\overset{\lambda}{c}_{02}\overset{\mu}{c}_{22}=\mathfrak{G}_{\lambda\mu},$$

$$\overset{\lambda}{c}_{21}\overset{\mu}{c}_{01}-\overset{\lambda}{c}_{01}\overset{\mu}{c}_{21}=\mathfrak{H}_{\lambda\mu},$$

$$\overset{\lambda}{c}_{20}\overset{\mu}{c}_{00}-\overset{\lambda}{c}_{00}\overset{\mu}{c}_{20}=\mathfrak{J}_{\lambda\mu}.$$

1. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{A}_{\lambda,\lambda+1}\ \mathfrak{A}_{\lambda,\lambda+2}$$
$$\lambda=1,2,\ldots 7$$

verschwinden, so genügt der zu (A) Adjungierten ein Integral von der Form:

$$e^{-\int \frac{\overset{\lambda}{c}_{12}}{\overset{\lambda}{c}_{22}}\partial x},$$

d. h. (A) ist reductibel.

Da die Coefficienten $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ in Bezug auf $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ ebenso construiert sind wie die $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ in Bezug auf $\overset{a-2}{c}_{\lambda\mu}$, so ist es genügend, den Fall $\lambda=1$ zu betrachten.

Wir setzen für $\overset{2}{c}_{22}$, $\overset{3}{c}_{22}\ldots$ die Werte derselben durch $c_{22}\ldots$ ein (mit Hülfe der Formeln S. 9).

$$\mathfrak{A}_{12}=\quad c_{22}\,[c'_{12}+c_{02}-p_2\,c_{22}]-c_{12}\,[c'_{22}+c_{12}]=0 \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}_{13}=\quad c_{22}\,[c''_{12}+2c'_{02}-2p_2\,c'_{22}-(p'_2+p_3)\,c_{22}-p_2\,c_{12}]-$$
$$-c_{12}\,[c''_{22}+2c'_{12}+c_{02}-p_2\,c_{22}]=0 \tag{2}$$

dividieren beide Seiten der Gleichung (1) durch c_{22}^2, so erhalten wir:

$$\frac{c_{02}}{c_{22}}=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{12}}{c_{22}}+p_2+\left(\frac{c_{12}}{c_{22}}\right)^2, \tag{1'}$$

dividiert man nun auch die Gleichung (2) durch c_{22}^2, so findet man unter Benutzung von (1′) und der identischen Relationen:

$$\frac{c'_{12}}{c_{22}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{12}}{c_{22}} + \frac{c_{12}}{c_{22}} \cdot \frac{c'_{22}}{c_{22}}$$

$$\frac{c_{22}\,c''_{12} - c_{12}\,c''_{22}}{c_{22}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{12}}{c_{22}} + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{12}}{c_{22}} \cdot \frac{c'_{22}}{c_{22}}$$

folgendes:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{12}}{c_{22}} + 3\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{12}}{c_{22}} - p_3 + p'_2 - \left(\frac{c_{12}}{c_{22}}\right)^3 = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{c_{12}}{c_{22}} = -\frac{\partial \log u}{\partial x},$$

dann erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$u''' + p_2\,u' + (p'_2 - p_3)\,u = 0$$

d. i. aber die zu (A) Adjungierte, also: der zu (A) Adjungierten gehört (falls $\lambda = a$) ein Integral

$$e^{-\int \frac{c_{12}^{a}}{c_{22}^{a}}\partial x}.$$

2. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{B}_{\lambda,\lambda+1},\ \mathfrak{B}_{\lambda,\lambda+2}$$
$$\lambda = 1, \ldots 7$$

verschwinden, so genügt der Gleichung (A') [wir bezeichnen so die Adjungierte zu (A)] ein Integral von der Form

$$e^{-\int \frac{c_{11}^{\lambda}}{c_{21}^{\lambda}}\partial x}$$

falls folgende Gleichung besteht:

$$\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)\overset{\lambda}{c}_{22}=\frac{\partial p_2}{\partial t}\overset{\lambda}{c}_{12}.$$

Auch hier nehmen wir $\lambda=1$, betrachten also:

$$\mathfrak{B}_{12}=c_{21}\left[c'_{11}+c_{01}-2\,c_{22}\frac{\partial p_2}{\partial t}-c_{21}p_2\right]-c_{11}\left[c'_{21}+c_{11}\right]=0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{13}=c_{21}\Big[c''_{11}+2\,c'_{01}-2\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)c_{22}-\\ -4\frac{\partial p_2}{\partial t}c'_{22}-2\,p_2c'_{21}-p_3c_{21}-2\,c_{12}\frac{\partial p_2}{\partial t}-c_{11}p_2\Big]-\\ -c_{11}\left[c''_{21}+2\,c'_{11}+c_{01}-p_2c_{31}-2\frac{\partial p_2}{\partial t}c_{22}\right]=0;\end{aligned} \qquad (2)$$

dividieren (1) durch c_{21}^2 und erhalten

$$(1')\;\frac{c_{01}}{c_{21}}-2\frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{c_{22}}{c_{21}}=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{11}}{c_{21}}+p_2+\left(\frac{c_{11}}{c_{21}}\right)^2.$$

Mit Hülfe von (1′) ergiebt (2):

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{11}}{c_{21}}+3\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{11}}{c_{21}}-p_2\frac{c_{11}}{c_{21}}+p'_2-p_3-\\ -\left(\frac{c_{11}}{c_{21}}\right)^3=\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)\frac{c_{22}}{c_{21}}-\frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{c_{12}}{c_{21}}.\end{aligned}$$

Wenn die rechte Seite null ist, so genügt der (A') ein Integral:

$$e^{-\int\frac{c_{11}}{c_{21}}\partial x}$$

d. h. (A) ist reductibel.

5. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\lambda+1},\ \mathfrak{K}_{\lambda,\lambda+2}$$
$$\lambda=1,2\ldots 7$$

verschwinden, so genügt der Gleichung (A') ein Integral

$$e^{-\int_{c_{20}}^{\lambda} \frac{c_{10}}{\lambda} \partial x}$$

falls folgende Gleichung besteht:

$$c_{22}\left[\frac{\partial^3 p_2}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}\right] + c_{21}\left[\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\right] = c_{12}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} + c_{11}\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

Denn es ist:

$$\mathfrak{K}_{12} = c_{20}\left[c'_{10} + c_{00} - c_{22}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - c_{21}\frac{\partial p_2}{\partial t} - c_{20}\,p_2\right] - \\ - c_{10}\left[c'_{20} + c_{10}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\mathfrak{K}_{13} = c_{20}\Big[c''_{10} + 2\,c'_{00} - c_{22}\left(\frac{\partial^3 p_2}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}\right) - \\ - 2\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2}c'_{22} - c_{21}\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t}\right) - 2\frac{\partial p_2}{\partial t}c'_{21} - \\ - c_{20}(p'_2 + p_3) - 2\,p_2\,c'_{20} - c_{12}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \\ - c_{11}\frac{\partial p_2}{\partial t} - c_{10}\,p_2\Big] - c_{10}\Big[c''_{20} + 2\,c'_{10} + c_{00} - \\ - c_{22}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - c_{21}\frac{\partial p_2}{\partial t} - c_{20}\,p_2\Big] = 0. \qquad (2)$$

Dividieren wir (1) durch c_{20}^2, so wird:

$$\frac{c_{00}}{c_{20}} - \frac{c_{22}}{c_{20}}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \frac{c_{21}}{c_{20}}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{10}}{c_{20}} + p_2 + \left(\frac{c_{10}}{c_{20}}\right)^2; \qquad (1')$$

mit Hülfe von (1′) erhalten wir aus (2) nach Division durch c_{20}^2:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{10}}{c_{20}} + 3\frac{c_{10}}{c_{20}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{10}}{c_{20}} - p_2\frac{c_{10}}{c_{20}} + p'_2 - p_3 - \left(\frac{c_{10}}{c_{20}}\right)^3 = \\ = \frac{c_{22}}{c_{20}}\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} + \frac{c_{21}}{c_{20}}\frac{\partial P_3}{\partial t} - \frac{c_{12}}{c_{20}}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \frac{c_{11}}{c_{20}}\frac{\partial p_2}{\partial t}$$

wo $P_3 = p'_2 - p_3$ ist.

Wenn nun die rechte Seite null ist, so genügt der Gleichung (A')

$$e^{-\int \frac{c_{10}}{c_{20}} \partial x}$$

d. h. (A) ist reductibel.

4. Wenn die Determinanten:

$$\mathfrak{A}_{\lambda, \lambda+1} \text{ und } \mathfrak{G}_{\lambda, \lambda+1}$$
$$\lambda = 1 \ldots 8$$

verschwinden, so genügt der Gleichung (A') ein Integral

$$e^{-\int \frac{c^{\lambda}_{12}}{c^{\lambda}_{22}} \partial x}.$$

Denn es ist

$$\mathfrak{G}_{12} = c_{22} \left[c'_{02} - p_3 \, c_{22} \right] - c_{02} \left[c'_{22} + c_{12} \right] = 0.$$

Daraus folgt durch Division mit c_{22}^2:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{c_{02}}{c_{22}} - p_3 - \frac{c_{12}}{c_{22}} \cdot \frac{c_{02}}{c_{22}} = 0,$$

nimmt man die Gleichung $(1')$ N 1 (S. 18) hinzu, so folgt das Behauptete.

5. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{B}_{\lambda, \lambda+1} \text{ und } \mathfrak{H}_{\lambda, \lambda+1}$$
$$\lambda = 1 \ldots 8$$

verschwinden, so genügt der Gleichung (A') ein Integral

$$e^{-\int \frac{c^{\lambda}_{11}}{c^{\lambda}_{21}} \partial x},$$

falls die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial P_3}{\partial t}\frac{c_{22}}{c_{21}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{22}}{c_{21}} + \frac{c_{22}}{c_{21}}\cdot\frac{c_{11}}{c_{21}}\right]\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

Denn es ist

$$\mathfrak{H}_{1,2} = c_{21}\left[c'_{01} - 2\,c_{22}\frac{\partial p_3}{\partial t} - c_{21}\,p_3\right] - c_{01}\,[c'_{21} + c_{11}] = 0$$

aus dieser folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{01}}{c_{21}} - p_3 - 2\,\frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{c_{22}}{c_{21}} - \frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{c_{01}}{c_{21}} = 0$$

mit Hülfe von $\mathfrak{B}_{12} = 0$ [(1′) in N 2] folgt das Gesagte.

6. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\lambda+1} \text{ und } \mathfrak{J}_{\lambda,\lambda+1}$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots 8$$

verschwinden, so genügt der Gleichung (A') ein Integral:

$$e^{-\int\frac{\overset{\lambda}{c}_{10}}{\underset{c_{20}}{\lambda}}\partial x},$$

falls die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}\frac{c_{22}}{c_{20}} + \frac{\partial P_3}{\partial t}\frac{c_{21}}{c_{20}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{22}}{c_{20}} + \frac{c_{22}}{c_{20}}\cdot\frac{c_{10}}{c_{20}}\right]\cdot\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{21}}{c_{20}} + \frac{c_{21}}{c_{20}}\cdot\frac{c_{10}}{c_{20}}\right]\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

Es ist nämlich

$$\mathfrak{J}_{12} = c_{20}\left[c'_{00} - c_{22}\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} - c_{21}\frac{\partial p_3}{\partial t} - c_{20}\,p_3\right] - c_{00}\,[c'_{20} + c_{10}] = 0;$$

daher:

$$0=\frac{c_{00}}{c_{20}}-p_3-\frac{c_{10}}{c_{20}}\cdot\frac{c_{00}}{c_{20}}-\frac{c_{22}}{c_{20}}\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}-\frac{c_{21}}{c_{20}}\frac{\partial p_3}{\partial t};$$

mit Hülfe von $\mathfrak{K}_{12}=0$ folgt das Gesagte.

Es möge angenommen werden dass $e^{-\int\frac{c_{11}}{c_{21}}\partial x}$ ein Integral von (A') ist, aus N 2 und N 5 folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{22}}{c_{21}}+\frac{c_{22}}{c_{21}}\frac{c_{11}}{c_{21}}=\frac{c_{12}}{c_{21}}.$$

multipliciert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{c_{21}}{c_{22}}$, so erhält man:

$$\frac{\partial \log\frac{c_{22}}{c_{21}}}{\partial x}=\frac{c_{12}}{c_{22}}-\frac{c_{11}}{c_{21}} \tag{a}$$

Wird nun angenommen, dass $e^{-\int\frac{c_{10}}{c_{21}}\partial x}$ ein Integral von (A') ist, so folgt aus N 3 und N 6: auf analoge Weise:

$$\frac{\partial \log\frac{c_{22}}{c_{20}}}{\partial x}=\frac{c_{12}}{c_{22}}-\frac{c_{10}}{c_{20}} \tag{b}$$

$$\frac{\partial \log\frac{c_{21}}{c_{20}}}{\partial x}=\frac{c_{11}}{c_{21}}-\frac{c_{10}}{c_{20}} \tag{c}$$

aus (b) und (c) folgt (a). Wenn man nun annimmt, dass der (A') 3 Integrale genügen

$$e^{-\int\frac{c_{12}}{c_{22}}\partial x},\quad e^{-\int\frac{c_{11}}{c_{21}}\partial x},\quad e^{-\int\frac{c_{10}}{c_{20}}\partial x},$$

so können sich dieselben nur um constante Factoren unterscheiden.

$$Ce^{-\int\frac{c_{12}}{c_{21}}\partial x}=e^{-\int\frac{c_{10}}{c_{20}}\partial x}$$

oder:

$$e^{-\int\left(\frac{c_{10}}{c_{2}}-\frac{c_{11}}{c_{21}}\right)\partial x} = C.$$

Mit Rücksicht von (c) haben wir:

$$c = \frac{c_{21}}{c_{20}}, \text{ d. h.}$$

$$q_2 = C\, q_3 + f\,(t),$$

da $c_{21} = 3\, q_2'$, $c_{20} = 3\, q_3'$, $c_{22} = 3\, q_1'$ ist. Ähnlich erhalten wir:

$$q_1 = C_1\, q_3 + \varphi\,(t),$$

die additive Constante ist noch eine Function von t.

Ein besonderes Interesse bietet der Fall, den wir vorher ausgeschlossen hatten, nämlich der Fall des Verschwindens sämtlicher $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$. Zunächst wird dabei gefunden, dass der Adjungierten zu (A) ein Integral von der Form $z = \overset{a-1}{c_{22}}$ genügt; aufserdem fordert man, dass alle $\overset{a-1}{c_{\lambda\mu}}$ sich durch $\overset{a-1}{c_{22}}$ ausdrücken lassen; setzt man nun die constanten Factoren überall gleich 1, so sieht die $\overline{a-1}$ te Gleichung so aus:

$$\overset{a-1}{c_{22}}\,(2, 0) + \overset{a-1}{c_{12}}\,(1, 0) + \overset{a-1}{c_{02}}\,(0, 0) = c_1 t + c_2$$

wo c_1 c_2 Constante sind, c_{12} und c_{02} Functionen von c_{22}, und zwar ist

$$\overset{a-1}{c_{12}} = -\frac{\partial \overset{a-1}{c_{22}}}{\partial x}$$

$$\overset{a-1}{c_{02}} = \frac{\partial^2 \overset{a-1}{c_{22}}}{\partial x^2} + p_2 \overset{a-1}{c_{22}}\,.$$

Der Fall $a = 2$ giebt das Resultat: (A) ist reductibel.

Wenn der Coefficient der 2. Ableitungen in (A) nicht null wäre, d. h. wenn (A) so aussehen würde:

$$(3, 0) + p_1 (2, 0) + p_2 (1, 0) + p_3 (0, 0) = 0,$$

so würde bei der Behandlung der Specialfälle (S. 17 ff.) an Stelle der zu (A) Adjungierten die 1. Associierte treten. Sind auch alle $\overset{a-1}{c_{\lambda\mu}}$ null, so genügt auch hier $z = \overset{a-1}{c_{22}}$ der zu (A) Adjungierten.

II.

Wir nehmen an, dass beide Differentialgleichungen (A) und (B) von der vierten Ordnung sind; die Adjungierten zu (A) und (B) bezeichnen wir mit (A') und (B'). Wir gehen also von der folgenden Differentialgleichung aus:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + p_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + p_3 \frac{\partial z}{\partial x} + p_4 z = 0 \tag{A}$$

und nehmen an, dass das Fundamentalsystem von Integralen der (A) folgender Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + q_1 \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} + q_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + q_3 \frac{\partial z}{\partial t} + q_4 z = 0 \tag{B}$$

Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Paragraphen bei und bilden folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial^4 B}{\partial x^4} + p_2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + p_3 \frac{\partial B}{\partial x} + p_4 B - \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} - q_1 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - q_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - q_3 \frac{\partial A}{\partial t} -$$

$$- q_4 A = \sum_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} (\lambda, \mu) = 0 \tag{1}$$

$$\lambda = 0 \ldots 3$$

$$\mu = 0 \ldots 3$$

Es sind die Coefficienten $c_{\lambda\mu}$:

$$c_{4-\alpha, 4-\beta} = \sum_{\rho=0}^{4} p_\rho (4-\varrho)_{\alpha-\rho} \frac{\partial^{\alpha-\rho} q_\beta}{\partial x^{\alpha-\rho}} - \sum_{\sigma=0}^{4} q_\sigma (4-\sigma)_{\beta-\sigma} \frac{\partial^{\beta-\sigma} p_\alpha}{\partial t^{\beta-\sigma}}$$

$$p_0 = q_0 = 1; \; p_1 = 0; \; n_\mu = \binom{n}{\mu}$$

Wir differentiieren die Gleichungen (1) 7mal nach x mit Berücksichtigung der wiederholt differentiierten Gleichungen (A) bzw. (B) [das System dieser Gleichungen bezeichnen mit S.]; auf diese Weise erhalten wir folgende 7 Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3} \overset{a}{c}_{\lambda\mu}\,(\lambda,\mu)=0 \tag{2}$$

$$a=2,\ldots 8$$

Wir bezeichnen nämlich den Coefficienten von (λ, μ) in der a-mal nach x differentiierten Gleichung (1) mit $\overset{a+1}{c}_{\lambda\mu}$; $\overset{1}{c}_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}$. Für die Ausrechnung der successiven Coefficienten bekommen wir folgende Recursionsformeln:

$$\begin{aligned}
\overset{a+1}{c}_{\lambda 3} &= \overset{a}{c'}_{\lambda 3} + \overset{a}{c}_{\lambda-1,3} - p_{4-\lambda}\cdot \overset{a}{c}_{33} \\
\overset{a+1}{c}_{\lambda 2} &= \overset{a}{c'}_{\lambda 2} + \overset{a}{c}_{\lambda-1,2} - 3\,\frac{\partial p_{4-\lambda}}{\partial t}\,\overset{a}{c}_{33} - p_{4-\lambda}\,\overset{a}{c}_{32} \\
\overset{a+1}{c}_{\lambda 1} &= \overset{a}{c'}_{\lambda 1} + \overset{a}{c}_{\lambda-1,1} - \sum_{k=1}^{3} k\,\frac{\partial^{k-1} p_{4-\lambda}}{\partial t^{k-1}}\,\overset{a}{c}_{3k} \\
\overset{a+1}{c}_{\lambda 0} &= \overset{a}{c'}_{\lambda 0} + \overset{a}{c}_{\lambda-1,0} - \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial^{k} p_{4-\lambda}}{\partial t^{k}}\,\overset{a}{c}_{3k}
\end{aligned}$$

$$a=1,2\ldots 7$$

Aus diesen 8 Gleichungen eliminieren wir:

$$(1,2)\ (2,2)\ (3,2)\ (0,3)\ (1,3)\ (2,3)\ (3,3)$$

und erhalten alsdann:

$$e_{02}\,(0,2)+\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{1} e_{\lambda\mu}\,(\lambda,\mu)=0 \tag{I}$$

wo

$$e_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} c_{\lambda\mu} & \overset{2}{c}_{\lambda\mu} & \dots & \overset{8}{c}_{\lambda\mu} \\ c_{12} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{12} \\ c_{22} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{22} \\ c_{32} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{32} \\ c_{03} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{03} \\ c_{13} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{13} \\ c_{23} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{23} \\ c_{33} & \dots & \dots & \overset{8}{c}_{33} \end{vmatrix}.$$

Wir nehmen **1.** an, dass $e_{02} = 0$ ist, und dass alle übrigen $e_{\lambda\mu}$ auch $\gtrless 0$.

Es mögen $z_1 \dots z_4$ ein Fundamentalsystem von Integralen der (A) bilden, die auch (B) genügen; nach einem Umlauf um einen singulären Punkt ändern sich die Integrale wie folgt:

$$\bar{z}_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} \alpha_{\lambda\mu}\, z_\mu$$

wo $\alpha_{\lambda\mu}$ Funktionen von t sind, es ist z. B.

$$\overline{(0,2)}_\lambda = \sum_{\mu=1}^{4} \left\{ \alpha_{\lambda\mu} (0,2)_\mu + 2\alpha'_{\lambda\mu} (0,1)_\mu + \alpha''_{\lambda\mu} (0,0)_\mu \right\},$$

wo

$$\alpha^{(k)}_{\lambda\mu} = \frac{d^k \alpha_{\lambda\mu}}{dt^k}.$$

Unsere Gleichung (I) verwandelt sich nach einem Umlauf in:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \left\{ \alpha'_{\lambda\mu} F_\mu + \alpha''_{\lambda\mu} G_\mu \right\} = 0 \qquad (\bar{I})$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

wo,

$$F_\lambda = 2\,[illegible]\,e_{12} - \sum_{\varrho=1}^{3} [illegible]$$

$$G_\lambda = e_{12} \cdot z_\lambda .$$

Wir haben nun 2 Fälle zu unterscheiden:

a) $\delta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} \neq 0.$

b) $\delta = 0.$

a) Bezeichnen wir mit $\delta_{\lambda\mu}$ diejenige Determinante, welche aus δ hervorgeht, wenn man in ihr die λten Colonnenelemente durch die 1 mal nach t differentiierten Elemente der μten Colonne ersetzt: alsdann folgt aus den 4 Gleichungen $(\bar{I})$, dass

$$\delta \cdot F_\alpha = (-1)^\alpha \{\delta_{\alpha 1} G_1 + \delta_{\alpha 2} G_2 + \delta_{\alpha 3} G_3 + \delta_{\alpha 4} G_4\} \qquad (\bar{\bar{I}})$$

ein Integral von (A) ist; oder da e_{02} als von null verschieden vorausgesetzt ist: es genügt der (A) ein Integral von der Form:

$$J(z_\alpha) = (0,\, 1)_\alpha + \sum_{\varrho=0}^{3} k_{\varrho 0}\, (\varrho,\, 0)_\alpha ,$$

wo

$$k_{\varrho 0} = \frac{\gamma_{\varrho 1}}{2 e_{02}} .$$

Nun behaupten wir folgendes: ist (A) irreductibel, so bilden $J(z_1) \ldots J(z_4)$ ein Fundamentalsystem von Integralen der (A).

Gesetzt, es wäre nicht der Fall, so gäbe es eine Gleichung von der Form:

$$\gamma_1\, J(z_1) + \gamma_2\, J(z_2) + \gamma_3\, J(z_3) + \gamma_4\, J(z_4) = 0,$$

wo $\gamma_1 \ldots \gamma_4$ Constante sind (die $\neq 0$). Setzen wir für $J(z_\mu)$ seinen Wert aus Gleichung $(\bar{I})$ ein:

$$J(z_\mu) = (-1)^\mu \sum_{\rho=1}^{4} \frac{\delta_{\mu\rho}}{\delta} \cdot z_\rho ,$$

so bekommt die angenommene Relation die Form:

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4 = 0,$$

wo

$$m_k = -\gamma_1 \delta_{1k} + \gamma_2 \delta_{2k} - \gamma_3 \delta_{3k} + \gamma_4 \delta_{4k}.$$
$$k = 1 \ldots 4,$$

Da $z_1 \ldots z_4$ ein Fundamentalsystem der (A) bilden und (A) irreductibel ist, müssen alle m_k verschwinden; nun ist aber $\delta \neq 0$, also auch $\delta^3 \neq 0$, d. h. es sind

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0,$$

mithin ist unsere Annahme absurd. Umgekehrt: bilden $J(z_1) \ldots$ kein Fundamentalsystem der (A), so ist dieselbe reductibel, denn alsdann giebt es zu je 3 Integralen eine homogene lineare Relation; also die Gleichung (A) hat alsdann mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung Integrale gemeinsam.

b) δ sei gleich null; alsdann sind, da $z_1 \ldots z_4$ ein Fundamentalsystem, auch alle $\delta_{\lambda\mu}$ null; daraus folgt:

$$\alpha_{\lambda\mu} = C e^{ct} + C'$$
C, c, C' Constante.

Um dieses einzusehen, wollen wir ein Paar der Gleichungen des Systems (δ) aufschreiben:

$$\delta_{21} = \Sigma \pm \alpha'_{11} \alpha''_{21} \alpha'_{33} \alpha'_{44} = 0$$
$$\delta_{12} = \Sigma \pm \alpha''_{12} \alpha'_{22} \alpha'_{33} \alpha'_{44} = 0$$
$$\delta_{13} = \Sigma \pm \alpha''_{13} \alpha'_{22} \alpha'_{33} \alpha'_{44} = 0$$
$$\delta_{14} = \Sigma \pm \alpha''_{14} \alpha'_{22} \alpha'_{33} \alpha'_{44} = 0.$$

Aus der ersten kann gefolgert werden:

$$\alpha''_{11} = g_1 \alpha'_{11}$$
$$\alpha''_{21} = g_1 \alpha'_{21}, \text{ u. s. w.}$$

aus der zweiten:

$$\alpha''_{12} = h_1 \, \alpha'_{12}$$

$$\alpha''_{22} = h_1 \, \alpha'_{22}, \text{ u. s. w.}$$

aus der dritten:

$$\alpha''_{13} = j_1 \, \alpha'_{13}, \text{ u. s. w.}$$

aus der letzten:

$$\alpha''_{14} = f_1 \, \alpha'_{14}, \text{ u. s. w.}$$

wo $g_1 \, h_1 \, f_1 \, j_1$ Constante sind.

Weitere Aufschlüsse giebt die Betrachtung dieses Falles $\delta = 0$ über die Natur der Differentialgleichungen (A) nicht.

2. Es möge e_{02} verschwinden, d. h. die Coefficienten der beiden Gleichungen (A) und (B) und die Ableitungen dieser Coefficienten nach x und t sind miteinander durch die Gleichungen:

$$e_{02} = \begin{vmatrix} c_{02} & \cdots & \overset{8}{c}_{02} \\ c_{12} & \cdots & \overset{8}{c}_{12} \\ c_{22} & \cdots & \overset{8}{c}_{22} \\ c_{32} & \cdots & \overset{8}{c}_{32} \\ c_{03} & \cdots & \overset{8}{c}_{03} \\ c_{13} & \cdots & \overset{8}{c}_{13} \\ c_{23} & \cdots & \overset{8}{c}_{23} \\ c_{33} & \cdots & \overset{8}{c}_{33} \end{vmatrix} = 0$$

verbunden. Es lässt sich zeigen, dass, vorausgesetzt, dass $\delta \neq 0$ ist, statt dieser einzigen Gleichung 4 andere gefolgert werden können; und zwar durch folgende Überlegung.

Die Gleichung I (§ 1) sieht jetzt so aus:

$$e_{31}(3,1) + e_{21}(2,1) + e_{11}(1,1) + e_{01}(0,1) +$$
$$+ e_{30}(3,0) + e_{20}(2,0) + e_{10}(1,0) + e_{00}(0,0) = 0;$$

nach einem Umlauf um einen singulären Punkt verwandelt sich diese Gleichung in:

$$\alpha'_{\lambda 1} E_1 + \alpha'_{\lambda 2} E_2 + \alpha'_{\lambda 3} E_3 + \alpha'_{\lambda 4} E_4 = 0$$
$$\lambda = 1, \cdots 4$$

Da nun $\delta \gtrless 0$ vorausgesetzt ist, so sind:

$$\text{alle } E_\mu \text{ null } (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$
$$E_\mu = (3,0)_\mu\, e_{31} + (2,0)_\mu\, e_{21} + (1,0)_\mu\, e_{11} + (0,0)_\mu\, e_{01}$$

und da z_1, z_2, z_3, z_4 ein Fundamentalsystem bilden, ist

$$e_{31} = 0 \quad e_{21} = 0$$
$$e_{11} = 0 \quad e_{01} = 0.$$

Bezeichnen wir nun in den Coefficienten $e_{\lambda\mu}$ die Unterdeterminanten zu $\overset{k}{c}_{\lambda\mu}$ mit C_k, so können wir unsere Gleichung auch so schreiben:

$$c_{31} C_1 + \overset{2}{c}_{31} C_2 + \cdots + \overset{8}{c}_{31} C_8 = 0 \qquad (1)$$

$$c_{21} C_1 + \overset{2}{c}_{21} C_2 + \cdots + \overset{8}{c}_{21} C_8 = 0 \qquad (2)$$

$$c_{11} C_1 + \overset{2}{c}_{11} C_2 + \cdots + \overset{8}{c}_{11} C_8 = 0 \qquad (3)$$

$$c_{01} C_1 + \overset{2}{c}_{01} C_2 + \cdots + \overset{8}{c}_{01} C_8 = 0; \qquad (4)$$

je 3 der C_λ können eliminiert werden, so dass, wenn wir es z. B. mit C_1, C_2, C_3 thun, wir statt $e_{12} = 0$ auch folgende Gleichungen betrachten können:

$$\sum_{\varepsilon=4}^{8} l_\varepsilon \, C_\varepsilon = 0$$

$$\text{wo } l_\varepsilon = \begin{vmatrix} c_{01} & \overset{2}{c}_{01} & \overset{3}{c}_{01} & \overset{\varepsilon}{c}_{01} \\ c_{11} & \overset{2}{c}_{11} & \overset{3}{c}_{11} & \overset{\varepsilon}{c}_{11} \\ c_{21} & \overset{2}{c}_{21} & \overset{3}{c}_{21} & \overset{\varepsilon}{c}_{21} \\ c_{31} & \overset{2}{c}_{31} & \overset{3}{c}_{31} & \overset{\varepsilon}{c}_{31} \end{vmatrix}$$

Kehren nun zu unseren Gleichungen (2) . . . S. 28 zurück, differentiieren die letzte derselben noch 4mal der Reihe nach x auf angegebene Weise, und eliminieren noch

$$(0, 2), \; (1, 1), \; (2, 1), \; (3, 1)$$

so erhalten wir folgende Endgleichung:

$$\eta_{01} \, (0, 1) + \sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\lambda 0} \, (\lambda, 0) = 0, \qquad (II)$$

wo

$$\eta_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} c_{\lambda\mu} & \overset{2}{c}_{\lambda\mu} & \cdots & \overset{12}{c}_{\lambda\mu} \\ c_{02} & \overset{2}{c}_{02} & \cdots & \overset{12}{c}_{02} \\ c_{03} & \overset{2}{c}_{03} & \cdots & \overset{12}{c}_{03} \\ c_{11} & \overset{2}{c}_{11} & \cdots & \overset{12}{c}_{11} \\ c_{12} & \overset{2}{c}_{12} & \cdots & \overset{12}{c}_{12} \\ c_{13} & \overset{2}{c}_{13} & \cdots & \overset{12}{c}_{13} \\ c_{21} & \overset{2}{c}_{21} & \cdots & \overset{12}{c}_{21} \\ c_{31} & \overset{2}{c}_{31} & \cdots & \overset{12}{c}_{31} \\ c_{22} & \overset{2}{c}_{22} & \cdots & \overset{12}{c}_{22} \\ c_{32} & \overset{2}{c}_{32} & \cdots & \overset{12}{c}_{32} \\ c_{23} & \overset{2}{c}_{23} & \cdots & \overset{12}{c}_{23} \\ c_{33} & \overset{2}{c}_{33} & \cdots & \overset{12}{c}_{33} \end{vmatrix}.$$

Es sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

$$1)\quad \eta_{01} \neq 0,$$

alsdann geht II nach einem Umlauf über in:

$$\eta_{01}\left[\alpha'_{\lambda 1} z_1 + \alpha'_{\lambda 2} z_2 + \alpha'_{\lambda 3} z_3 + \alpha'_{\lambda 4} z_4\right] = 0$$
$$\lambda = 1, 2, 3, 4;$$

da nun z_1, z_2, z_3, z_4 ein Fundamentalsystem bilden, müssen die sämtlichen $\alpha'_{\lambda\mu}$ null sein, d. h. die Monodromiegruppe von (A) ist vom Parameter unabhängig.

$$2)\ \eta_{01}=0,$$

daraus folgt aber auch, dass

$$\eta_{30}=0,\ \eta_{20}=0,\ \eta_{10}=0,\ \eta_{00}=0,$$

man hat also 5 Gleichungen zwischen den Coefficienten der (A) und (B) und den Ableitungen dieser Coefficienten nach x und t.

Bezeichnen mit H_a die Unterdeterminante zu $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ in den Ausdrücken für $\eta_{\lambda\mu}$, so sehen diese 5 Gleichungen wie folgt aus:

$$c_{01}H_1+\overset{2}{c}_{01}H_2+\cdots+\overset{12}{c}_{01}H_{12}=0$$
$$c_{00}H_1+\overset{2}{c}_{00}H_2+\cdots+\overset{12}{c}_{00}H_{12}=0$$
$$c_{10}H_1+\overset{2}{c}_{10}H_2+\cdots+\overset{12}{c}_{10}H_{12}=0$$
$$c_{20}H_1+\overset{2}{c}_{20}H_2+\cdots+\overset{12}{c}_{20}H_{12}=0$$
$$c_{30}H_1+\overset{2}{c}_{30}H_2+\cdots+\overset{12}{c}_{30}H_{12}=0,$$

man sieht also, dass eine einzige Gleichung sich ergiebt:

$$\sum_{\epsilon} m_{\epsilon}H_{\epsilon}=0.$$

3. Die Gleichungen, welche zwischen den Coefficienten der (A) und (B) bestehen, sind dermafsen compliciert, dass an eine Behandlung derselben nicht gedacht werden kann. Jedoch lässt sich die Reductibilität der (A) auf eine andere Weise, durch die Behandlung gewisser Determinanten, einsehen. Die symmetrische Form der Coefficienten $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ in Bezug auf $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ $a=2,3,4\ldots$ spielt hier eine ganz erhebliche Rolle.

Die 8malige Differentiation der Gleichung (1) nach x und Eliminierung von

$$(2,0)\ (3,0)\ (2,1)\ (3,1)\ (2,2)\ (3,2)\ (2,3)\ (3,3)$$

ergiebt eine Gleichung von der Form

$$\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{1} \varDelta_{ab}\,(a, b) = 0,$$

wo

$$\varDelta_{\lambda\mu} = \sum \pm\, c_{\lambda\mu}\, \overset{2}{c}_{20}\, \overset{3}{c}_{30}\, \overset{4}{c}_{21} \,.\,.\,.\, \overset{9}{c}_{33}$$

Das Studium der Matrix

$$\left|\begin{matrix} c_{20} & \overset{2}{c}_{20} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{20} \\ c_{30} & \overset{2}{c}_{30} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{30} \\ c_{21} & \overset{2}{c}_{21} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{21} \\ c_{31} & \overset{2}{c}_{31} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{31} \\ c_{22} & \overset{2}{c}_{22} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{22} \\ c_{32} & \overset{2}{c}_{32} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{32} \\ c_{23} & \overset{2}{c}_{23} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{23} \\ c_{33} & \overset{2}{c}_{33} & .\,.\,. & \overset{9}{c}_{33} \end{matrix}\right|$$

ergiebt uns verschiedene Kriterien für die Reductibilität der (A).

Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\overset{\lambda}{c}_{33}\,\overset{\mu}{c}_{23} - \overset{\lambda}{c}_{23}\,\overset{\mu}{c}_{33} = K_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{32}\,\overset{\mu}{c}_{22} - \overset{\lambda}{c}_{22}\,\overset{\mu}{c}_{32} = L_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{31}\,\overset{\mu}{c}_{21} - \overset{\lambda}{c}_{21}\,\overset{\mu}{c}_{31} = M_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{30}\,\overset{\mu}{c}_{20} - \overset{\lambda}{c}_{20}\,\overset{\mu}{c}_{30} = N_{\lambda\mu}\,.$$

1. Wenn die Determinanten 2. Ordnung $K_{\lambda,\lambda+1}$, $K_{\lambda,\lambda+2}$, $K_{\lambda,\lambda+3}$ $\lambda = 1, 2, \ldots 6$ zu je 3 genommen verschwinden, so genügt der (A') ein Integral von der Form:

$$e^{-\int \frac{\overset{\lambda}{c}_{23}}{\overset{\lambda}{c}_{33}} \partial x}$$

d. h. (A) ist reductibel.

Da $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ in Bezug auf $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ ebenso gebaut ist wie $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ gegenüber $\overset{a-2}{c}_{\lambda\mu}$, ist es genügend, den Fall $\lambda = 1$ zu betrachten.

Wir haben also folgende Gleichung:

$$c_{33}\overset{2}{c}_{23} - c_{23}\overset{2}{c}_{33} = 0 \tag{1}$$

$$c_{33}\overset{3}{c}_{23} - c_{23}\overset{3}{c}_{33} = 0 \tag{2}$$

$$c_{33}\overset{4}{c}_{23} - c_{23}\overset{4}{c}_{33} = 0 \tag{3}$$

wobei:

$$\overset{2}{c}_{23} = c'_{23} + c_{13} - p_2 c_{33}$$

$$\overset{2}{c}_{33} = c'_{33} + c_{23}$$

$$\overset{3}{c}_{23} = c''_{23} + 2c'_{13} + c_{03} - 2p_2 c'_{33} - (p'_2 + p_3) c_{33} - p_2 c_{23}$$

$$\overset{3}{c}_{33} = c''_{33} + 2c'_{23} + c_{13}$$

$$\overset{4}{c}_{23} = c'''_{23} + 3c''_{13} + 3c'_{03} - (p''_2 + 2p'_3 + p_4 - p_2^2) c_{33} -$$
$$- 3(p'_2 + p_3) c'_{33} - 3p_2 c''_{33} - (p'_2 + p_3) c_{23} -$$
$$- 3p_2 c'_{23} - p_2 c_{13}$$

$$\overset{4}{c}_{33} = c'''_{33} + 3c''_{23} + 3c'_{13} + c_{03} - 3p_2 c'_{33} - 2p'_2 c_{33}$$
$$- p_3 c_{33} - p_2 c_{23};$$

diese Werte, in Gleichung (1) eingesetzt, ergeben:

$$\frac{c_{13}}{c_{33}} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{23}}{c_{33}} + p_2 + \left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\right)^2; \tag{1'}$$

in die Gleichung (2) gesetzt:

$$\frac{c_{03}}{c_{33}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{23}}{c_{33}} - 3\,\frac{c_{23}}{c_{33}}\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{23}}{c_{33}} + p_2\,\frac{c_{23}}{c_{33}} + \left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\right)^3 - (p_2' - p_3). \tag{2'}$$

wir dividieren nämlich jede der Gleichungen (1) (2) (3) durch c_{33}^2 was erlaubt, weil $c_{33} \gtrless 0$ vorausgesetzt wird.

Mit Rücksicht auf (1′) und (2′) ergiebt (3):

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{c_{23}}{c_{33}} + 4\,\frac{c_{23}}{c_{33}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{23}}{c_{33}} + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{23}}{c_{33}}\right)^2 - \\ &-6\left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{23}}{c_{33}} + \left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\right)^4 + p_2\left[-\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{23}}{c_{33}} + \left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\right)^2\right] - \\ &-[2\,p_2' - p_3]\,\frac{c_{23}}{c_{33}} + [p_4 - p_3' + p_2''] = 0 \end{aligned} \tag{3'}$$

es sind überall statt der Ableitungen nach x die entsprechenden Striche gesetzt.

Setzen wir

$$\frac{c_{23}}{c_{33}} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

so finden wir, dass (3′) die Form bekommt:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + p_2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2\,p_2' - p_3)\,\frac{\partial v}{\partial x} + (p_4 - p_3' + p_2'')\,v = 0$$

d. i. aber die Gleichung (A'); offenbar ist für $\lambda = 2$:

$$e^{-\int \frac{c_{23}^2}{c_{33}^2}\,\partial x}$$

ein Integral der (A') u. s. f.

Man könnte von vornherein annehmen, dass, wenn z. B. die obigen Gleichungen für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ bestehen, es zwei solcher Integrale giebt; es ist jedoch nur scheinbar. Die Gleichungen:

$$K_{23} = 0 \quad K_{24} = 0 \quad K_{25} = 0$$

nämlich besagen: es giebt ein Integral:

$$e^{-\int \frac{\overset{2}{c}_{23}}{\overset{2}{c}_{33}} \partial x}$$

oder auch nach Einsetzung der Werte für $\overset{2}{c}_{23}$ und $\overset{2}{c}_{33}$:

$$\frac{\overset{2}{c}_{23}}{\overset{2}{c}_{33}} = \frac{c'_{23} + c_{13} - p_2 c_{33}}{c'_{33} + c_{23}} = \frac{\frac{c'_{23}}{c_{33}} + \frac{c_{13}}{c_{33}} - p_2}{\frac{c'_{33}}{c_{33}} + \frac{c_{23}}{c_{33}}}.$$

Nun ist ja: $\frac{c_{13}}{c_{33}}$ durch $K_{12} = 0$ bestimmt,

$$\frac{c'_{23}}{c_{33}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{c_{23}}{c_{33}} + \frac{c_{23}}{c_{33}} \cdot \frac{c'_{33}}{c_{33}};$$

dieses eingesetzt giebt:

$$\frac{\overset{2}{c}_{23}}{\overset{2}{c}_{33}} = \frac{c_{23}}{c_{33}}$$

was zu zeigen war; daraus können wir die Folgerung ziehen: wenn auch alle (d. h. für $\lambda = 1, 2 \ldots$ bis 6) $K_{\lambda, \lambda+1} \ldots$ verschwinden, so besagt dieses nur, dafs $e^{-\int \frac{c_{23}}{c_{33}} \partial x}$ der (A') genügt.

2. Wenn die Determinanten

$$L_{\lambda, \lambda+1} \quad L_{\lambda, \lambda+2} \quad L_{\lambda, \lambda+3},$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots 6$$

zu je 3 genommen, verschwinden, so genügt der (A') ein Integral

$$e^{-\int \frac{c_{32}}{c_{33}} \partial x},$$

d. h. (A) ist reductibel, falls $c_{13}\, c_{23}$ und c_{33} miteinander durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} c_{13} + \left[2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\right] c_{23} = \left[\frac{\partial^3 p_2}{\partial x^2\, \partial t} - \frac{\partial^2 p_3}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial p_4}{\partial t}\right] c_{33}$$

verbunden sind.

Wir zeigen dieses für $\lambda = 1$.

$$L_{12} = c_{32} \overset{2}{c}_{22} - c_{22} \overset{2}{c}_{32} = 0 \tag{1}$$

$$L_{13} = c_{32} \overset{3}{c}_{22} - c_{22} \overset{3}{c}_{32} = 0 \tag{2}$$

$$L_{14} = c_{32} \overset{4}{c}_{22} - c_{22} \overset{4}{c}_{32} = 0 \tag{3}$$

die Coefficienten sind:

$$\overset{2}{c}_{32} = c'_{32} + c_{22}$$

$$\overset{2}{c}_{22} = c'_{22} + c_{12} - p_2\, c_{32} - 3 \frac{\partial p_2}{\partial t} c_{33}$$

$$\overset{3}{c}_{32} = c''_{32} + 2 c'_{22} + c_{12} - p_2\, c_{32} - 3 \frac{\partial p_2}{\partial t} c_{33}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{c}_{22} = c''_{22} + 2 c'_{12} + c_{02} &- 3 \left[\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\right] c_{33} \\ &- 6 \frac{\partial p_2}{\partial t} c'_{33} - [p'_2 + p_3]\, c_{32} - 2 p_2\, c'_{32} \\ &- p_2\, c_{22} - 3 \frac{\partial p_2}{\partial t} c_{23}\end{aligned}$$

$$\overset{4}{c}_{32} = c_{32}''' + 3c_{22}'' + 3c_{12}' + c_{02}$$
$$- 3\left[2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x \, \partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t}\right] c_{33} - 9\,\frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{33}'$$
$$- [2p_2' + p_3]\, c_{32} - 3p_2\, c_{32}' - 3\,\frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{23} - p_2\, c_{22}$$

$$\overset{4}{c}_{22} = c_{22}''' + 3c_{12}'' + 3c_{02}' - 3\,\frac{\partial a}{\partial t}\, c_{33}$$
$$- 9\,\frac{\partial b}{\partial t}\, c_{33}' - 9\,\frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{33}'' - a \cdot c_{32}$$
$$- 3b \cdot c_{32}' - 3p_2\, c_{32}'' - 3\,\frac{\partial b}{\partial t}\, c_{23}$$
$$- 9\,\frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{23}' - b \cdot c_{22} - 3p_2\, c_{22}'$$
$$- 3\,\frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{13} - p_2\, c_{12}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a = p_2'' + 2p_3' + p_4 - p_2^2$$
$$b = p_2' + p_3.$$

Diese Werte, in Gleichungen (1) eingesetzt, ergeben:

$$\frac{c_{12}}{c_{32}} - 3\,\frac{\partial p_2}{\partial t}\,\frac{c_{33}}{c_{32}} = -\,\frac{\partial s}{\partial x} + p_2 + s^2 \tag{1'}$$

Wo wir, der Kürze wegen, gesetzt haben:

$$\frac{c_{22}}{c_{32}} = s.$$

Mit Hülfe von (1′) ergiebt (2):

$$-\frac{c_{02}}{c_{32}} - 3\left[\frac{\partial^2 p_2}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\right]\frac{c_{33}}{c_{32}} + 3\frac{\partial p_2}{\partial t}\,\frac{c_{23}}{c_{32}}$$
$$= -\,\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + {}^3/_2\,\frac{\partial (s^2)}{\partial x} - p_2\, s + (p_2' - p_3) - s^3 \tag{2'}$$

Mit Rücksicht auf (1′) und (2′) ergiebt Gleichung (3):

$$s = \frac{c_{22}}{c_{32}}$$

$$\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} - 4s\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 6s^2\frac{\partial s}{\partial x} - 3\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - s^4$$
$$+ (2p_2' - p_3)\, s - p_2\left(s^2 - \frac{\partial s}{\partial x}\right) + [p_3' - p_2'' - p_4']$$
$$= 3\frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{c_{13}}{c_{32}} + 3\left[2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\right]\frac{c_{23}}{c_{32}}$$
$$- 3\left[\frac{\partial^3 p_2}{\partial x^2\,\partial t} - \frac{\partial^2 p_3}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial p_4}{\partial t}\right]\frac{c_{33}}{c_{32}}.$$

Nimmt man nun an, dass die rechte Seite null ist, so genügt der (A') ein Integral:

$$e^{-\int \frac{c_{32}}{c_{33}}\partial x}.$$

Wann ist nun die rechte Seite null? Wir nehmen an, dass der (A'):

$$z^{(IV)} + P_2\, z'' + P_3\, z' + P_4\, z = 0,$$

wo also:

$$P_2 = p_2,$$
$$P_3 = 2p_2' - p_3,$$
$$P_4 = p_2'' - p_3' + p_4$$

c_{33} und $\frac{\partial c_{33}}{\partial t}$ als Integrale genügen. Wir differentieren ferner (A') nach t:

$$z = c_{33}.$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}\frac{\partial c_{33}}{\partial t} + P_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial c_{33}}{\partial t} + P_3\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial c_{33}}{\partial t}$$
$$+ P_4\frac{\partial c_{33}}{\partial t} + \frac{\partial P_2}{\partial t}c_{33}'' + \frac{\partial P_3}{\partial t}c_{33}' + \frac{\partial P_4}{\partial t}c_{33} = 0,$$

und vergleichen diese Gleichung mit der letztgewonnenen Gleichung, so finden wir, dass derselben durch die Annahme:

$$c_{23} = -\frac{\partial c_{33}}{\partial x},$$

$$c_{13} = -\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial x^2}$$

genügt wird.

3. Wenn die Determinanten

$$M_{\lambda, \lambda+1} \; M_{\lambda, \lambda+2} \; M_{\lambda, \lambda+3}$$

verschwinden, so genügt der (A') ein Integral

$$e^{-\int \frac{c_{21}}{c_{31}} \partial x}$$

falls $c_{12}, c_{22}, c_{32}, c_{13}, c_{23}, c_{33}$ miteinander durch die Gleichung:

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} c_{12} + \frac{\partial P_3}{\partial t} c_{22} - \frac{\partial P_4}{\partial t} c_{32} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} c_{13} +$$
$$+ \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} c_{23} - \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2} c_{33} = 0$$

verbunden sind. $\lambda = 1, 2 \ldots 6$.

Wir zeigen dies für $\lambda = 1$:

$$M_{12} = c_{31} \overset{2}{c}_{21} - c_{21} \overset{2}{c}_{31} = 0, \tag{1}$$

$$M_{13} = c_{31} \overset{3}{c}_{21} - c_{21} \overset{3}{c}_{31} = 0, \tag{2}$$

$$M_{14} = c_{31} \overset{4}{c}_{21} - c_{21} \overset{4}{c}_{31} = 0. \tag{3}$$

Statt die Coefficienten $\overset{2}{c}_{21} \ldots \overset{4}{c}_{31}$ vollständig auszuschreiben, wollen wir die Recursionsformel, nach der dieselben berechnet werden, angeben; es ist:

$$l = 1, \ldots 4; \; k = 2p_2' + p_3$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{c}_{2,4-l} &= c_{2,4-l}''' + 3\,c_{1,4-l}'' + 3\,c_{0,4-l}' \\ &- \sum_{d=1}^{l} (4-d)_{l-d} \left\{ \frac{\partial^{l-d} a}{\partial t^{l-d}} c_{3,4-d} \right. \\ &+ \frac{\partial^{l-d} b}{\partial t^{l-d}} [3\,c_{3,4-d}' + c_{2,4-d}] \\ &+ \left. \frac{\partial^{l-d} p_2}{\partial t^{l-d}} [3\,c_{3,4-d}'' + 3\,c_{2,4-d}' + c_{1,4-d}] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{c}_{3,4-l} &= c_{3,4-l}''' + 3\,c_{2,4-l}'' + 3\,c_{1,4-l}' + c_{0,4-l} \\ &- \sum_{d=1}^{l} (4-d)_{l-d} \left\{ \frac{\partial^{l-d} k}{\partial t^{l-d}} c_{3,4-d} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^{l-d} p_2}{\partial t^{l-d}} [3\,c_{3,4-d}' + c_{2,4-d}] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{c}_{2,4-l} &= c_{2,4-l}'' + 2\,c_{1,4-l}' + c_{0,4-l} \\ &- \sum_{d=1}^{l} (4-d)_{l-d} \left\{ \frac{\partial^{l-d} b}{\partial t^{l-d}} c_{3,4-d} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^{l-d} p_2}{\partial t^{l-d}} [2\,c_{3,4-d}' + c_{2,4-d}] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{c}_{3,4-l} &= c_{3,4-l}'' + 2\,c_{2,4-l}' + c_{1,4-l} \\ &- \sum_{d=1}^{l} (4-d)_{l-d} \frac{\partial^{l-d} p_2}{\partial t^{l-d}} c_{3,4-d},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{c}_{2,4-l} &= c_{2,4-l}' + c_{1,4-l} \\ &- \sum_{d=1}^{l} (4-d)_{l-d} \frac{\partial^{l-d} p_2}{\partial t^{l-d}} c_{3,4-d}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (1) (2) und (3) ein, so erhält man analog wie in den beiden früher behandelten Fällen:

$$s_2 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$$

$$\frac{\partial^3 s_2}{\partial x^3} - 4\, s_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + 6\, s_2^2 \frac{\partial s_2}{\partial x} - 3 \left(\frac{\partial s_2}{\partial x}\right)^2 - s_2^4 +$$

$$+ P_3\, s_2 - P_2 \left[s_2^2 - \frac{\partial s_2}{\partial x}\right] + P_4 = 3 \frac{\partial P_2}{\partial t} \frac{c_{12}}{c_{31}} +$$

$$+ 3 \frac{\partial P_3}{\partial t} \frac{c_{22}}{c_{31}} - 3 \frac{\partial P_4}{\partial t} \frac{c_{32}}{c_{31}} + 3 \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} \frac{c_{13}}{c_{31}} +$$

$$+ 3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} \frac{c_{23}}{c_{31}} - 3 \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2} \frac{c_{33}}{c_{31}}.$$

Wenn also die rechte Seite null ist, so genügt der (A') ein Integral

$$e^{-\int \frac{c_{21}}{c_{31}} \partial x}$$

d. h. (A) ist reductibel.

Wir setzen nun voraus, dass $\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}$ ein Integral der (A') ist, und differentiieren die Gleichungen (A') 2mal nach t:

$$z = c_{33}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2} + P_3 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2} +$$

$$+ P_4 \frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2} + 2 \left\{ \frac{\partial P_2}{\partial t} \frac{\partial^3 c_{33}}{\partial x^2\, \partial t} + \frac{\partial P_3}{\partial t} \frac{\partial^2 c_{33}}{\partial x\, \partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial P_4}{\partial t} \frac{\partial c_{33}}{\partial t} \right\} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} c''_{33} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} c'_{33} + \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2} c_{33} = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit der obigen, so sieht man, dass die rechte Seite null wird, falls

$$c_{23} = -c'_{33}$$

$$c_{13} = -c''_{33}$$

$$c_{32} = 2\,\frac{\partial c_{33}}{\partial t}$$

$$c_{22} = 2\,\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial x\,\partial t}$$

$$c_{12} = -2\,\frac{\partial^3 c_{33}}{\partial x^2\,\partial t}$$

ist.

4. Wenn die Determinanten

$$N_{\lambda,\lambda+1},\; N_{\lambda,\lambda+2},\; N_{\lambda,\lambda+3},$$
$$\lambda = 1,\, 2 \cdots 6$$

verschwinden, so genügt der (A') ein Integral:

$$e^{-\int \frac{c_{20}}{c_{30}}\partial x}$$

d. h. (A) ist reductibel, falls $c_{11}\; c_{12} \cdots c_{33}$ durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial P_2}{\partial t}\, c_{11} + \frac{\partial P_3}{\partial t}\, c_{21} - \frac{\partial P_4}{\partial t}\, c_{31} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}\, c_{12} +$$
$$+ \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}\, c_{22} - \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2}\, c_{32} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial t^3}\, c_{13} +$$
$$+ \frac{\partial^3 P_3}{\partial t^3}\, c_{23} - \frac{\partial^3 P_4}{\partial t^3}\, c_{33} = 0$$

miteinander verbunden sind. Durch die Annahme, dass $\frac{\partial^3 c_{33}}{\partial t^3}$

ein Integral der (A') ist, erhält man, indem die (A') 3mal nach t differentiiert:

$$z = c_{33}$$

$$3\left[\frac{\partial P_2}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}+\frac{\partial P_3}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}+\frac{\partial P_4}{\partial t}\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}\right]+$$
$$+3\left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial c_{33}}{\partial t}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial c_{33}}{\partial t}+\frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2}\frac{\partial c_{33}}{\partial t}\right]+$$
$$+\left[\frac{\partial^3 P_2}{\partial t^3}\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 P_3}{\partial t^3}\frac{\partial c_{33}}{\partial x}+\frac{\partial^3 P_4}{\partial t^3}c_{33}\right]=0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der obigen, so findet man:

$$c_{23} = -c'_{33}$$
$$c_{13} = -c''_{33}$$
$$c_{32} = 3\frac{\partial c_{33}}{\partial t}$$
$$c_{22} = -3\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial c_{33}}{\partial t}$$
$$c_{12} = -3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial c_{33}}{\partial t}$$
$$c_{31} = 3\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}$$
$$c_{21} = -3\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}$$
$$c_{11} = -3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2}$$

In unseren bisherigen Untersuchungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass alle $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ von null verschieden sind.

Es ist von Interesse, noch folgenden Fall zu betrachten; wir nehmen an, dass z. B. $\overset{a}{c}_{33} = \overset{a}{c}_{23} = \overset{a}{c}_{13} = \overset{a}{c}_{03} = 0$ sind, setzen die Werte, die Formel S. 28 zu Hülfe nehmend, ein und wählen: $a = 2$.

Dann ist:

$$\overset{2}{c}_{33} = c'_{33} + c_{23} = 0 \qquad a)$$

$$\overset{2}{c}_{23} = c'_{23} + c_{13} - p_2 c_{33} = 0 \qquad b)$$

$$\overset{2}{c}_{13} = c'_{13} + c_{03} - p_3 c_{33} = 0 \qquad c)$$

$$\overset{2}{c}_{03} = c'_{03} - p_4 c_{33} = 0. \qquad d)$$

Differentiiert man *a*) 3mal, *b*) 2mal, *c*) einmal nach x, so erhält man

$$c_{33}^{IV} + P_2 c''_{33} + P_3 c'_{33} + P_4 c_{33} = 0 \qquad (1)$$

d. h. der Gleichung (A') genügt ein rationales Integral $z = c_{33}$.

Wir nahmen $a = 2$, weil es vollständig gleichgültig ist, wie wir a nehmen, da die $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ genau ebenso durch $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ ausgedrückt werden, wie $\overset{2}{c}_{\lambda\mu}$ durch $c_{\lambda\mu}$.

Nun mögen

$$\overset{2}{c}_{32} = \overset{2}{c}_{22} = \overset{2}{c}_{12} = \overset{2}{c}_{02} = 0$$

sein oder:

$$\overset{2}{c}_{32} = c'_{32} + c_{22} = 0 \qquad a_1)$$

$$\overset{2}{c}_{22} = c'_{22} + c_{12} - p_2 c_{32} - 3 \frac{\partial p_2}{\partial t} c_{33} = 0 \qquad b_1)$$

$$\overset{2}{c}_{12} = c'_{12} + c_{02} - p_3 c_{32} - 3 \frac{\partial p_3}{\partial t} c_{33} = 0 \qquad c_1)$$

$$\overset{2}{c}_{02} = c'_{02} - p_4 c_{32} - 3 \frac{\partial p_4}{\partial t} c_{33} = 0. \qquad d_1)$$

Aus diesen erhält man analog wie früher:

$$c_{32}^{IV} + P_2\, c''_{32} + P_3\, c'_{32} + P_4\, c_{32} +$$

$$+ 3 \left[\frac{\partial P_2}{\partial t}\, c''_{33} + \frac{\partial P_3}{\partial t}\, c'_{33} + \frac{\partial P_4}{\partial t}\, c_{33} \right] = 0 \tag{2}$$

Aus der Annahme, dass

$$\overset{2}{c}_{31} = c'_{31} + c_{21} = 0$$

$$\overset{2}{c}_{21} = c'_{21} + c_{11} - p_2\, c_{31} - 2\, \frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{32} - 3\, \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2}\, c_{33} = 0$$

$$\overset{2}{c}_{11} = c'_{11} + c_{01} - p_3\, c_{31} - 2\, \frac{\partial p_3}{\partial t}\, c_{32} - 3\, \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^3}\, c_{33} = 0$$

$$\overset{2}{c}_{01} = c'_{01} - p_4\, c_{31} - 2\, \frac{\partial p_4}{\partial t}\, c_{32} - 3\, \frac{\partial^2 p_4}{\partial t^2}\, c_{33} = 0$$

folgt:

$$c_{31}^{IV} + P_2\, c''_{31} + P_3\, c'_{31} + P_4\, c_{31} + 2 \left[\frac{\partial P_2}{\partial t}\, c''_{32} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial P_3}{\partial t}\, c'_{32} + \frac{\partial P_4}{\partial t}\, c_{32} \right] + 3 \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}\, c''_{33} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}\, c'_{33} + \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2}\, c_{33} \right] = 0, \tag{3}$$

endlich:

$$\overset{2}{c}_{30} = c'_{30} + c_{20} = 0$$

$$\overset{2}{c}_{20} = c'_{20} + c_{10} - p_2\, c_{30} - \frac{\partial p_2}{\partial t}\, c_{31} - \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2}\, c_{32} - \frac{\partial^3 p_3}{\partial t^3}\, c_{33} = 0$$

$$\overset{2}{c}_{10} = c'_{10} + c_{00} - p_3\, c_{30} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\, c_{31} - \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}\, c_{32} - \frac{\partial^3 p_3}{\partial t^3}\, c_{33} = 0$$

$$\overset{2}{c}_{00} = c'_{00} - p_4\, c_{30} - \frac{\partial p_4}{\partial t}\, c_{31} - \frac{\partial^2 p_4}{\partial t^2}\, c_{32} - \frac{\partial^3 p_4}{\partial t^3}\, c_{33} = 0$$

und daraus:

$$c_{30}^{IV} + P_2\, c_{30}'' + P_3\, c_{30}' + P_4\, c_{30} + \frac{\partial P_2}{\partial t}\, c_{31}'' +$$

$$+ \frac{\partial P_3}{\partial t}\, c_{31}' + \frac{\partial P_4}{\partial t}\, c_{31} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}\, c_{32}'' + \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}\, c_{32}' +$$

$$+ \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2}\, c_{32} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial t^3}\, c_{33}'' + \frac{\partial^3 P_3}{\partial t^3}\, c_{33}' +$$

$$+ \frac{\partial^3 P_4}{\partial t^3}\, c_{33} = 0. \tag{4}$$

Vergleicht man die Gleichungen (1), (2), (3), (4) miteinander, so findet man, ähnlich wie im Falle $n = 3$ (S. 25), dass, falls alle $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ verschwinden, man eine Gleichung von der Form erhält:

$$\overset{a}{c}_{33}\,(3, 0) + \overset{a}{c}_{23}\,(2, 0) + \overset{a}{c}_{13}\,(1, 0) + \overset{a}{c}_{03}\,(0, 0) = C_1\, t^2 + C_2\, t + C_3,$$

wo C_1, C_2, C_3 Constante sind in Bezug auf t, d. h. z genügt alsdann einer Differentialgleichung 3. Ordnung, d. h. (A) ist reductibel.

Anmerkung. Falls in der Differentialgleichung (A) der Coefficient der 3., nach x genommenen Ableitung, nicht null ist, so tritt beim Studium der Unterdeterminanten $K_{\lambda\mu}$ $L_{\lambda\mu}$ . . . der Unterschied ein, dass das Integral $e^{-\int \frac{c_{23}}{c_{33}} \partial x}$ . . . nicht ein Integral von (A'), sondern ein Integral der ersten Associierten von (A) ist.

Wir können aus den obigen Betrachtungen den Schluss ziehen, dass die Reductibilität der Gleichung (A) sich auf verschiedene Weise kundgiebt; die symmetrische Beschaffenheit der Coefficienten $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ in Bezug auf $\overset{a-1}{c}_{\lambda\mu}$ . . . spielt dabei die ausschlaggebende Rolle.

Nun wollen wir aber noch andere Determinanten betrachten,

bei denen die Coefficienten $\overset{\lambda}{c}_{03} \,.\,.\, \overset{\lambda}{c}_{13}$ zur Geltung kommen; wir führen zu dem Ende die Bezeichnungen ein:

$$\overset{\lambda}{c}_{33}\overset{\mu}{c}_{03} - \overset{\lambda}{c}_{03}\overset{\mu}{c}_{33} = \mathfrak{A}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{33}\overset{\mu}{c}_{13} - \overset{\lambda}{c}_{13}\overset{\mu}{c}_{33} = \mathfrak{B}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{32}\overset{\mu}{c}_{02} - \overset{\lambda}{c}_{02}\overset{\mu}{c}_{32} = \mathfrak{C}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{32}\overset{\mu}{c}_{12} - \overset{\lambda}{c}_{12}\overset{\mu}{c}_{32} = \mathfrak{D}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{31}\overset{\mu}{c}_{01} - \overset{\lambda}{c}_{01}\overset{\mu}{c}_{31} = \mathfrak{E}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{31}\overset{\mu}{c}_{11} - \overset{\lambda}{c}_{11}\overset{\mu}{c}_{31} = \mathfrak{F}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{30}\overset{\mu}{c}_{00} - \overset{\lambda}{c}_{00}\overset{\mu}{c}_{30} = \mathfrak{G}_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\lambda}{c}_{30}\overset{\mu}{c}_{10} - \overset{\lambda}{c}_{10}\overset{\mu}{c}_{30} = \mathfrak{H}_{\lambda\mu}$$

1. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{A}_{\lambda,\lambda+1},\ \mathfrak{B}_{\lambda,\lambda+1} \text{ und } K_{\lambda,\lambda+1}$$
$$\lambda = 1,\ 2\ \ldots$$

verschwinden, so genügt der (A') ein Integral von der Form:

$$e^{-\int \frac{\overset{\lambda}{c}_{23}}{\overset{\lambda}{c}_{33}} \partial x}$$

d. h. (A) ist reductibel.

Denn setzen wir $\lambda = 1$, so wird

$$\mathfrak{A}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{03}}{c_{33}} - p_4 - \frac{c_{03}}{c_{33}} \cdot \frac{c_{23}}{c_{33}} = 0$$

$$\mathfrak{B}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{13}}{c_{33}} - p_3 - \frac{c_{13}}{c_{33}} \cdot \frac{c_{23}}{c_{33}} + \frac{c_{03}}{c_{33}} = 0$$

$K_{12} = 0$ (S. 38).

2. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{C}_{\lambda,\lambda+1},\ \mathfrak{D}_{\lambda,\lambda+1} \text{ und } L_{\lambda,\lambda+1}$$

verschwinden, so genügt der (A)

$$e^{-\int \frac{\overset{\lambda}{c_{22}}}{\overset{\lambda}{c_{32}}}\partial x}$$

falls die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial P_4}{\partial t}\frac{c_{33}}{c_{32}} + \frac{\partial P_3}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{33}}{c_{32}} - \frac{c_{33}}{c_{32}}\cdot\frac{c_{22}}{c_{32}}\right] +$$
$$+\frac{\partial P_2}{\partial t}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c_{33}}{c_{32}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_{33}}{c_{32}}\cdot\frac{c_{22}}{c_{32}}\right) - \frac{c_{22}}{c_{32}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{33}}{c_{32}} - \frac{c_{33}}{c_{32}}\cdot\frac{c_{22}}{c_{32}}\right\}\right] = 0. \quad (1)$$

Da so gebaute Coefficienten, wie hier bei $\frac{\partial P_3}{\partial t}$ und $\frac{\partial P_2}{\partial t}$, noch weiterhin vorkommen werden, wollen wir dieselben der Kürze halber so bezeichnen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{3,a+1}}{c_{3a}} - \frac{c_{3,a+1}}{c_{3a}}\cdot\frac{c_{2a}}{c_{3a}} = I(c_{3,a+1}\ c_{3a}\ c_{2a})$$

und unsere Gleichung (1) so schreiben:

$$\frac{\partial P_4}{\partial t}\frac{c_{33}}{c_{32}} + \frac{\partial P_3}{\partial t} I(c_{33}\, c_{32}\, c_{22}) + \frac{\partial P_2}{\partial t}\left[\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{c_{22}}{c_{32}} I\right] = 0. \quad (1)$$

Ferner ist

$$\mathfrak{C}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{02}}{c_{32}} - p_4 - \frac{c_{22}}{c_{32}}\frac{c_{02}}{c_{32}} - 3\frac{\partial p_4}{\partial t}\frac{c_{33}}{c_{32}} = 0$$

$$\mathfrak{D}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{12}}{c_{32}} - p_3 - \frac{c_{12}}{c_{32}}\cdot\frac{c_{22}}{c_{32}} - 3\frac{\partial p_3}{\partial t}\cdot\frac{c_{33}}{c_{32}} = 0$$

$L_{12} = 0$ (siehe S. 41).

Aus diesen Gleichungen folgt das Gesagte.

Wenn aber $e^{-\int \frac{c_{32}}{c_{33}} \partial x}$ ein Integral der (A') ist, so besteht diese Gleichung (1) und Gleichung in N 2 (S. 41) identisch, d. h. es ist

$$I\,(c_{33}\,c_{32}\,c_{22}) = -\frac{c_{23}}{c_{32}}$$

$$\frac{\partial I\,(c_{33}\,c_{32}\,c_{22})}{\partial x} - \frac{c_{22}}{c_{32}}\,I = -\frac{c_{13}}{c_{32}}.$$

Indem wir in der 1. der beiden Gleichungen beide Seiten mit $\frac{c_{32}}{c_{33}}$ multiplicieren, erhalten wir:

$$\frac{\partial \lg \frac{c_{33}}{c_{32}}}{\partial x} = \frac{c_{22}}{c_{32}} - \frac{c_{23}}{c_{33}};$$

aus der 2. folgt:

$$\frac{\partial \lg \frac{c_{23}}{c_{33}}}{\partial x} = \frac{c_{23}}{c_{33}} + \frac{c_{13}}{c_{33}}.$$

3. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{E}_{\lambda,\lambda+1},\ \mathfrak{F}_{\lambda,\lambda+1},\ M_{\lambda,\lambda+1}$$

verschwinden, so genügt der Gleichung (A') ein Integral von der Form

$$e^{-\int \frac{\overset{\lambda}{c}_{21}}{\underset{\lambda}{c}_{31}} \partial x}$$

falls die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial P_4}{\partial t}\frac{c_{32}}{c_{31}}+\frac{\partial P_3}{\partial t}I(c_{32}\,c_{31}\,c_{21})+\frac{\partial P_2}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}I(c_{32}\,c_{31}\,c_{21})-\frac{c_{21}}{c_{31}}I(_{32}\,c_{31}\,c_{21})\right]$$

$$+\frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2}\frac{c_{33}}{c_{31}}+\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}I(c_{33}\,c_{32}\,c_{22})+\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}I(c_{33}\,c_{32}\,c_{22})\right.$$

$$\left.-\frac{c_{22}}{c_{32}}I(c_{33}\,c_{32}\,c_{22})\right]=0 \tag{1}$$

es sind:

$$\mathfrak{G}_{12}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{01}}{c_{31}}-p_4-\frac{c_{01}}{c_{31}}\cdot\frac{c_{21}}{c_{31}}-2\frac{\partial p_4}{\partial t}\frac{c_{32}}{c_{31}}-3\frac{\partial^2 p_4}{\partial t^2}\frac{c_{33}}{c_{31}}=0$$

$$\mathfrak{H}_{12}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{11}}{c_{31}}-p_3-\frac{c_{11}}{c_{31}}\cdot\frac{c_{21}}{c_{31}}+\frac{c_{01}}{c_{31}}-2\frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{c_{32}}{c_{31}}-3\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}\frac{c_{33}}{c_{31}}=0$$

$M_{12}=0$ (siehe Seite 44).

Wenn nun

$$e^{-\int\frac{c_{21}}{c_{31}}\partial x}$$

ein Integral von (A') ist, so besteht die Gleichung N 3 und Gleichung S. 44 identisch; analog wie in N 2 finden wir:

$$\frac{\partial\cdot\lg\frac{c_{32}}{c_{31}}}{\partial x}=\frac{c_{21}}{c_{31}}-\frac{c_{22}}{c_{32}}$$

$$\frac{\partial\lg\cdot\frac{c_{22}}{c_{32}}}{\partial x}=\frac{c_{22}}{c_{32}}+\frac{c_{12}}{c_{32}}$$

4. Wenn die Determinanten

$$\mathfrak{G}_{\lambda,\lambda+1}\quad\mathfrak{H}_{\lambda,\lambda+1}\ \text{und}\ N_{\lambda,\lambda+1}$$

verschwinden, so genügt der (A') ein Integral von der Form:

$$e^{-\int \frac{\frac{\lambda}{c_{20}}}{\frac{\lambda}{c_{30}}} \partial x}$$

falls die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial P_4}{\partial t}\frac{c_{31}}{c_{30}} + \frac{\partial P_3}{\partial t} I(c_{31}c_{30}c_{20}) + \frac{\partial P_2}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x} I(c_{31}c_{30}c_{20}) - \frac{c_{20}}{c_{30}} I(..)\right]$$
$$+ \frac{\partial^2 P_4}{\partial t^2}\frac{c_{32}}{c_{30}} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} I(c_{32}c_{31}c_{21}) + \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x} I(c_{32}c_{31}c_{21}) - \frac{c_{21}}{c_{31}} I(..)\right]$$
$$+ \frac{\partial^3 P_4}{\partial t^3}\frac{c_{33}}{c_{30}} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial t^3} I(c_{33}c_{32}c_{22}) + \frac{\partial^3 P_2}{\partial t^3}\left[\frac{\partial}{\partial x} I(c_{33}c_{32}c_{22}) - \frac{c_{22}}{c_{32}} I(..)\right] = 0. \quad \ldots (1)$$

Es sind:

$$\mathfrak{G}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{00}}{c_{30}} - p_4 - \frac{c_{00}}{c_{30}}\cdot\frac{c_{20}}{c_{30}} - \frac{\partial p_4}{\partial t}\frac{c_{31}}{c_{30}} - \frac{\partial^2 p_4}{\partial t^2}\frac{c_{32}}{c_{30}} - \frac{\partial^3 p_4}{\partial t^3}\frac{c_{33}}{c_{30}} = 0$$

$$\mathfrak{H}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{c_{10}}{c_{30}} - p_3 - \frac{c_{10}}{c_{30}}\cdot\frac{c_{20}}{c_{30}} + \frac{c_{00}}{c_{30}} - \frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{c_{31}}{c_{30}} - \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2}\frac{c_{32}}{c_{30}} - \frac{\partial^3 p_3}{\partial t^3}\frac{c_{33}}{c_{30}} = 0$$

$N_{12} = 0$ (siehe Seite 47).

Wenn

$$e^{-\int \frac{c_{20}}{c_{30}} \partial x}$$

ein Integral der (A') ist, so bestehen die Gleichungen (1) und die Gleichung von N 4 (S. 47) identisch; man findet:

$$\frac{\partial \lg \frac{c_{31}}{c_{30}}}{\partial x} = \frac{c_{20}}{c_{30}} - \frac{c_{21}}{c_{31}}$$

$$\frac{\partial \lg \cdot \frac{c_{21}}{c_{31}}}{\partial x} = \frac{c_{21}}{c_{31}} + \frac{c_{11}}{c_{31}}.$$

Aus den Ausdrücken kann man leicht die Beziehnngen zwischen den Coefficienten q_1, q_2, q_3, q_4 der Differentialgleichung (B) ablesen, wenn man speciell die Annahme macht, dass der (A') 4 Integrale Genüge leisten

$$e^{-\int \frac{c_{32}}{c_{33}} \partial x} \qquad e^{-\int \frac{c_{22}}{c_{23}} \partial x} \qquad e^{-\int \frac{c_{21}}{c_{31}} \partial x} \qquad e^{-\int \frac{c_{20}}{c_{30}} \partial x}$$

welche sich voneinander um constante Factoren unterscheiden, z. B.:

$$e^{-\int \frac{c_{32}}{c_{33}} \partial x} = \text{Const.}\, e^{-\int \frac{c_{22}}{c_{23}} \partial x}$$

also:

$$e^{+\int \left(\frac{c_{22}}{c_{23}} - \frac{c_{32}}{c_{33}}\right) \partial x} = C_1$$

oder:

$$\frac{c_{33}}{c_{32}} = C_1$$

setzen die Werte von c_{33} und c_{32} aus S. 27 ein, so erhalten wir:

$$q_1 = C_1\, q_2 + C_1$$

u. s. w.

In dem Falle, wo die Ordnung der 2. Differentialgleichung (B) höher ist als die von (A), wo man also die Monodromiegruppe als vom Parameter abhängig anzunehmen hat, lassen sich die Criterien für die Reductibilität der Gleichung (A) bzw. (B) auf genau dieselbe Weise wie hier führen. Wird nun ganz allgemein der Fall zweier Differentialgleichungen $n$ter und $m$ter Ordnung ins Auge gefasst, wo $m \geqq n$, so kann ein analoges Verfahren eingeschlagen werden, um etwaige Reductibilität nachzuweisen: dabei spielt der symmetrische Bau der Coefficienten $\overset{a}{c}_{\lambda\mu}$ ... eine ganz hervorragende Rolle.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Lazarus Fuchs in Berlin und Herrn Prof. Albert Wangerin in Halle für das mir stets bewiesene freundliche Entgegenkommen meinen tiefsten Dank auszusprechen.

Vita.

Natus sum Julius Lévy Mosquae Nonis Februariis anni h. s. LXXV patre Jacobo Johanno, quem praematura morte ereptum valde lugeo, matre Theresia e gente Lévy. Fidei adscriptus sum evangelicae. Postquam per novem annos initio Progymnasium Mosquense, deinde quintum Gymnasium frequentavi, a. D. MDCCCXCII almam matrem adii Berolinensem ibique per decem semestria, deinde Halensem cum Vitebergensi consociatam, ubi ab hinc uno semestrio commoratus sum; rebus me dedi: imprimis mathematicis, physicis, meteorologicis, philosophicis, chemicis. Viros audivi illustrissimos et doctissimos: Berolini: de Bezold, Blasius, du Bois Reymond †, Fischer, Fock, Frobenius, Fuchs, de Gizycki †, de Helmholtz †, Hettner, van t'Hoff, Knoblauch, Kundt †, Planck, Paulsen, Schlesinger, Schwarz, Stumpf, Wien, Zeller, Halis: Dorn, Erdmann, Wangerin. Seminarii mathematici Berolinensis cui viri celeberrimi Fuchs, Schwarz, Frobenius praesunt, per quattuor semestria, laboratorii physici viri celeberrimi Warburg per sex menses, seminarii philosophici viri celeberrimi Stumpf per sex menses sodalis fui. Societatis mathematicae universitatis Berolinensis ab hinc novem semestriis sum sodalis.

Omnibus his viris de me meritis, imprimis Lazaro Fuchs et Alberto Wangerin gratias quam maximas ago semperque habebo.

Druck von G. Bernstein in Berlin.

